

令和 6 年 5 月 9 日現在

機関番号：23903

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03496

研究課題名（和文）拡張結び目とその不変量の研究

研究課題名（英文）Extended knots and their invariants

研究代表者

鎌田 直子（Kamada, Naoko）

名古屋市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60419687

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：拡張結び目は結び目の拡張であるが幾何学的性質に様々な違いあり、それにより結び目不変量などの従来の結び目の研究手法を自然に利用や拡張できない場合がある。本研究では拡張結び目である仮想結び目、twisted knot、溶接結び目と結び目のある幾何学的性質について調べ成果を得られた。さらに仮想結び目、twisted knotなどの不変量や分類方法を導入し、応用例を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結び目理論はトポロジーの一分野であり、拡張結び目は結び目を様々な視点で拡張した概念であり、その視点には幾何学的特徴や結び目不変量などがある。幾何学的特徴や結び目不変量を広い視点で調べることはその構造や性質の理解につながる。結び目不変量は代数系への写像であり代数学への応用が考えられる。本研究での拡張結び目の幾何学的側面や不変量に関する成果は、トポロジーや代数学への寄与が期待できる。

研究成果の概要（英文）：Extended knots are extensions of knots, but they exhibit various differences in geometric properties, which can sometimes prevent the natural utilization or extension of conventional research methods for knots, including knot invariants. In this study, we investigated the geometric properties of extended knots (virtual knots, twisted knots, and welded knots), and obtained results. Furthermore, we introduced invariants and classification methods for virtual knots, twisted knots, and others, and showed examples of their applications.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目 拡張結び目 不変量

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目理論は空間内に埋め込まれた円周(または複数の円周)を研究対象としている。拡張結び目とは様々な視点から結び目を拡張した概念である。Kauffman が発表した仮想結び目が拡張結び目のその例の一つである。その他 twisted knot、溶接結び目などがあるが、結び目不変量の構造を広い視点で解析することによって結び目理論、結び目不変量を構成する代数系などへの応用が期待され、近年多くの研究者によって研究されている。しかし、結び目より広い概念であるため結び目の研究手法をうまく応用できない例もあった。例えば、Goeritz 不変量など自然に拡張結び目不変量に定義することは難しい結び目不変量が存在する。

2. 研究の目的

拡張結び目に対して幾何的構造の究明、不変量の性質の解明、不変量を含めた新たな研究手法の確立が本研究の目的である。さらに結び目や曲面結び目の研究への応用を探ることである。

3. 研究の方法

幾何的構造の究明、不変量の性質の解明は関連しており並行して行う。幾何学的特徴をもつ拡張結び目のクラスを中心に調べる。そこで得られた幾何学的に特徴をもつ拡張結び目のクラスを中心に様々な不変量の値を計算し、不変量の性質を探る。

不変量を含めた新たな研究手法の確立については結び目から自然に拡張結び目に定義できない不変量や研究手法を拡張結び目に定義する方法を考察する。

特に仮想結び目から almost classical 仮想結び目を構成する方法を構築をめざす。さらにこの性質に利用する結び目の研究手法を仮想結び目に拡張する。また twisted knot から仮想結び目を構成する手法の応用も試みる。

結び目や曲面結び目の研究への応用については それまでの研究成果を結び目の研究への適用を試みる。

この研究全般において研究協力者や他の研究者と打ち合わせが必要であり、新しい情報の収集や 研究発表のために研究集会に参加することも必要である。そのための出張を予定している。

4. 研究成果

結び目は 3 次元空間に埋め込まれた 1 つまたは複数の円周であるとする。特に複数の円周で構成されることを強調する必要がある場合絡み目とする。

幾何的構造については主に以下の成果が得られた。

絡み目は 3 次元空間内に埋め込まれた複数個の円周である。絡み目を平面に射影して 2 重点に上下の情報を与えた図形を絡み目ダイアグラムという。また、同値な絡み目の変形に対応する絡み目ダイアグラムの変形を Reidemeister 変形という。すなわち 1 つの絡み目に対応する 2 つの絡み目ダイアグラムは Reidemeister 変形で移り合う。拡張絡み目である溶接絡み目、仮想絡み目、twisted link のダイアグラムもそれぞれ welded Reidemeister 変形、generalized Reidemeister 変形、twisted Reidemeister 変形で移り合う。絡み目に次の先行研究がある。絡み目の成分のいくつかの円周からなる部分集合も絡み目とみなすことができる。この部分絡み目に対応する絡み目ダイアグラムの部分集合である部分絡み目ダイアグラムを取り出して、それを Reidemeister 変形で異なる絡み目ダイアグラムに変形することができる。先行研究では絡み目ダイアグラムの部分絡み目ダイアグラムはその絡み目ダイアグラムの中でその部分絡み目に対応する任意の絡み目ダイアグラムに変形できることが示されていた。溶接結び目ダイアグラムに対しては同様な性質を持つことを示した。仮想結び目ダイアグラムに対しては同様な性質が成立しないことが、研究代表者の提案した cyclic covering の手法を用いることによって示すことができた。twisted link ダイアグラムに対しても double covering と cyclic covering の手法を用いて同様な性質が成立しないことを示した。

仮想結び目の不変量の性質に関して成果を得ることができた。

仮想結び目は幾何学的には厚みのある有向閉曲面内の結び目の安定同値類に対応している。結び目は、厚みのある 2 次元球面内の円周の同値類であるため仮想結び目は結び目のある種の拡張であると考えられる。仮想結び目ダイアグラムは結び目ダイアグラムに仮想交点を許して定義される。結び目ダイアグラムのアークにあるルールをつけて番号をつけることを Alexander numbering という。すべての結び目ダイアグラムは Alexander numbering 可能であるが仮想結び目ダイアグラムは可能でないものもある。Alexander numbering 可能な仮想結び目ダイアグラム

を almost classical という。この almost classical 仮想結び目ダイアグラムを代表元として
もつ仮想結び目を almost classical という。
また仮想結び目に oriented cut point を付随させることによって Alexander numbering 可能と
なるが、このような oriented cut point の集合を cut system と呼ぶ。この cut system と Satoh
と Taniguchi によって導入された仮想結び目の不変量である n -writhe の関係を明らかにした。こ
の関係から Almost classical な仮想結び目の n -writhe は 0 であることを示すことができる。
また、 m を法とした剰余類で Alexander numbering 可能な仮想結び目ダイアグラムを mod m
almost classical な仮想結び目ダイアグラムというが、mod m almost classical な仮想結び目
の n -writhe は m を法として 0 となることも示すことができる。さらに仮想結び目ダイアグラム
の incoherent double cover は almost classical なダイアグラムとある種の同値関係があるこ
とを示した。

仮想結び目及び twisted knot に対して不変量を含めた新たな研究手法成果を得ることができた。
本研究において目標にしていた仮想結び目ダイアグラムから almost classical 仮想結び目ダ
イアグラムへの写像を構築した。その写像を利用して仮想結び目から almost classical 仮想結
び目への写像(almost classical 化写像)を導いた。結び目不変量の 1 つである Goeritz 不変量
は結び目ダイアグラムの正規性を利用して定義される。仮想結び目ダイアグラムには非正規な
ものもあるため、仮想結び目に自然に拡張できない。almost classical 仮想結び目は正規性
を持つ。そこで almost classical 化写像を利用して仮想結び目に 2 つの Goeritz 不変量を定義し、
その応用例を示した。

さらに twisted knot の不変量を研究した。twisted knot ダイアグラムは仮想結び目ダイアグラ
ムのアークに bar と呼ばれる情報が付加されている。その bar の付随したアークは向きづけ不
可能な閉曲面内のひねられた部分に存在する結び目ダイアグラムのアークに対応している。仮
想結び目の不変量である n -writhe はダイアグラムのループの曲面上の性質を反映した不変量で
あるが、これに bar の情報を反映した twisted knot の不変量を定義した。

溶接結び目の研究は曲面結び目の研究への応用につながる。

仮想結び目および溶接結び目の不変量の研究を行なった。仮想結び目と溶接結び目は結び目と
異なる性質を持つ。溶接結び目はリポントーラス曲面結び目に対応しており、溶接結び目の研究
は曲面結び目の研究につながる。本研究で得られた 2 つの Goeritz 不変量のうち 1 つが溶接結
び目の不変量となっていることを明らかにした。これはリポントーラス結び目の分類に寄与す
ることが期待できる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naoko Kamada	4. 巻 40
2. 論文標題 Diagrams realizing prescribed sublink diagrams for virtual links and welded links	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 57-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naoko Kamada, Shigeto Kawata, Kaori Okubo, Akinobu Shimizu	4. 巻 60
2. 論文標題 A table of twisted knots with crossing number 3	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 239-266
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kamada Naoko	4. 巻 31
2. 論文標題 Conversion to almost classical virtual links and pseudo Goeritz matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 225098-1-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216522500985	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bartholomew Andrew, Fenn Roger, Kamada Naoko, Kamada Seiichi	4. 巻 31
2. 論文標題 Doodles and commutator identities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 224001-1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216522400016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoko Kamada	4. 巻 301
2. 論文標題 A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107518 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107518	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoko Kamada, Seiichi Kamada	4. 巻 148
2. 論文標題 Virtual links which are equivalent as twisted links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2273-2285
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14899	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Oriented cut systems and invariants of virtual and twisted links
3. 学会等名 Iberoamerican and Pan Pacific International Conference on Topology and its Applications (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Cut points and virtual link diagrams
3. 学会等名 The 14th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Virtual and twisted link diagrams and their sublink diagrams
3. 学会等名 The 18th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 Virtual link diagram とその sublink diagram
3. 学会等名 日本数学会 秋季分科会 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 仮想絡み目ダイアグラムの変形
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 仮想絡み目ダイアグラムとその部分ダイアグラム
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Virtual and welded link diagrams and their sublink diagrams
3. 学会等名 Knot theory and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 Cut systems and the n writhes of virtual knots
3. 学会等名 The 17th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 virtual link diagramの変換とその応用
3. 学会等名 研究集会「結び目理論」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Pseudo Goeritz invariants of virtual link diagrams
3. 学会等名 The 12th TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Pseudo Goeritz matrices for virtual link diagrams
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Pseudo Goeritz matrices for virtual links
3. 学会等名 First Korean-Russian Conference on Knot theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 virtual linkとtwisted link
3. 学会等名 N-KOOKセミナー 10月会合 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 Almost classical virtual links
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 virtual knotのpseudo Goeritz行列
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー 2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 On almost classical virtual links
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Constructing almost classical virtual links from virtual links
3. 学会等名 The JMM special session on Self-Distributive Structures, Knot Theory and the Yang-Baxter Equation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems
3. 学会等名 Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoko Kamada
2. 発表標題 Converting virtual knots to almost classical virtual knots
3. 学会等名 International Workshop Knots in Tsushima (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鎌田直子
2. 発表標題 Almost classical virtual knot について
3. 学会等名 拡大 KOOK セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	石井 敦 (Iahii Atsushi)		
研究協力者	鎌田 聖一 (Kamada Seiichi)		
研究協力者	宮澤 康行 (Miyazawa Yasuyuki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------