様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　３ 日現在

機関番号：２４４０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４９７

研究課題名（和文）錐双曲多様体の標準的基本多面体族を用いた３次元幾何構造の研究

研究課題名（英文）Study of geometric structures of 3-dimensional cone hyperbolic manifolds using the families of canonical fundamental polyhedra

研究代表者
秋吉　宏尚（Akiyoshi, Hirotaka）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：８０３９７６１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題で得られた成果を大別すると，Riley sliceを含む2つの放物的元が生成する自由でないクライン群に関する決定的性質に対する詳細な証明，具体例に対して得られた標準的基本多面体族の組み合わせ構造に関する安定性の存在に関する観察と関連する数値実験，そして，コンパクトでない双曲錐多様体を基本多面体の立場から研究する際にネックとなるエンドの組合わせ的構造の解析に関する新たな視点の導入とその基礎理論の整備となる．新たな視点は実射影構造を持つ多様体の研究とも密接に関わるもので，将来的には無限体積双曲構造の実射影幾何構造の観点からの退化や遷移に関する重要な基礎をなすものと期待される．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では3次元双曲幾何を中心的な研究対象とする．3次元空間内の結び目はDNAや高分子などの数学モデルのうち最も基本的なものと考えられるが，その位相的構造の解明はそれら具体的な実在を対象とする自然科学分野においても重要な役割を担っている．非常に多くの結び目が双曲幾何により支配され，その幾何構造は標準的な基本多面体により組合せ的に理解可能であることが知られており，本研究はその理解をさらに進めるための一ステップである．本研究で発見された新たな視点は，そうした組合わせ構造がより広い数学的対象に対しても有効な手掛かりとなることを示唆するという意味で大変興味深いものである．

研究成果の概要（英文）：The main results obtained in this project can be roughly divided into three categories: a detailed proof of a definitive property for non-free two-parabolic Klein groups, which includes the Riley slice; observations and related numerical experiments on the stability of the combinatorial structure of canonical fundamental polyhedra for a certain families of cone hyperbolic 3-manifolds; and introducing a new viewpoint on the analysis of the combinatorial structure of the ends, which is a bottleneck in the study of noncompact hyperbolic manifolds from the viewpoint of fundamental polyhedra. The new viewpoint is closely related to the study of real projective manifolds, and is expected to form an important basis for future research on degenerations and transitions of infinite volume hyperbolic structures from the viewpoint of real projective geometry.

研究分野：低次元多様体

キーワード：双曲幾何　錐多様体　基本多面体　実射影構造

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９，Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

３次元多様体は一意的な幾何構造を持つ（幾何化予想の肯定的解決）．また，様々な研究を通して３次元幾何構造のうちで双曲構造が主要な位置を占めると考えられる．本研究では「異なる多様体の幾何構造を，一様性を少し崩した錐特異点を許容する錐双曲構造の変形族により結ぶことで比較する」という Thurston のアイディアを基礎とする．錐双曲構造の変形に関する研究の歴史は長く，Thurston，Hodgson-Kerckhoff，Boileau-Leeb-Porti，Kojima，Bromberg，Moroianu-Schlenker，Lecuire-Schlenker 他の研究を通してその変形空間の解析的パラメータなどが詳しく調べられてきた．しかしながら，変形空間の可視化などの問題へのアプローチとしては，より代数的なパラメータのホロノミー表現が有効である．

与えられた表現が（錐）双曲構造のホロノミー表現として実現されるかという意味での幾何学的実現可能性は基本的な問いである．しかしながら，この問題は基本領域の発見と密接に関わるため，クライン群論においても解析的変形理論ほど一般的な結果は得られていない．ほぼ唯一といえる大きな成功は，穴あきトーラス・クライン群に対するフォード領域の組合わせ構造を決定するという Jorgensen 理論とその拡張にもとづくものである．この理論は Jorgensen による未完の論文で主張されたものをさす．この研究を表すには私の作間誠氏，和田昌昭氏，山下靖氏との共同研究に基づき山下靖氏が数値実験をもとに描いた Riley slice の図を参照するのが最適である．その図は２つの放物的元が生成する等長的離散群全体からなる空間を表している．上部の色付けられた部分が Riley slice と呼ばれる離散群を表す点の集まりであり，そこから下方に向けて延びる弧は錐双曲構造の変形族，その端点は二橋結び目または絡み目補空間の双曲構造を表す．本研究は Jorgensen 理論の対象であった穴あきトーラスの穴を錐特異点へと取り換えることにより得られる拡張を目指すものである．そのためにはオリジナルの理論で用いられたフォード領域だけでは足りないため，標準的基本多面体族という概念を導入し，「錐特異点版 Riley slice において，どの点が幾何学的に実現可能か？」という問いに答えることを目指す研究である．錐特異点のない完備双曲構造に対するホロノミー表現は $PSL(2,\mathbb{C})$に離散的な像を持ち，その双曲空間への作用の商空間としてもとの構造が復元される．このためホロノミー表現は幾何学的な情報を全て含むことになるが，錐双曲構造に対してはそれは成り立たない．実際，ホロノミー表現がどの程度の幾何学的情報を表すのかは全く明らかではない．したがって，上記の問いへの解答のためには，錐双曲構造の持つ幾何学的性質の研究だけではなく，そのホロノミー表現との関係の解明も必要になる．

２．研究の目的

２次元球面上に錐角πの錐特異点３点と錐角θの錐特異点１点を持たせて得られる錐多様体をOとする．この錐多様体はトーラス上に錐角２θの錐特異点１点を持つ錐多様体および球面上に錐角θの錐特異点４点を持つ錐多様体の両方を分岐被覆として持つ．Oと直線の直積として得られる３次元錐多様体を$M(\theta)$とし，$M(\theta)$からある位相的操作により３次元錐多様体$M(\theta,\alpha)$および $M(\theta,\alpha;s,\beta)$を構成する．ここで，$\alpha,\ \beta\in(0,2\pi]$は錐角を表すパラメータで，$s$は錐特異点集合として現れる２橋絡み目に対するパラメータである．詳細は割愛するが，「位相的操作」は錐特異点付き２ハンドルの追加であり，$M(\theta)$，$M(\theta,2\pi)$，$M(\theta,\alpha;s,\beta)$上の（適切な条件を持つ）錐双曲構造はそれぞれO上の擬フックス構造，拡張 Riley slice に含まれる構造，２橋結び目錐多様体上の構造と対応する．本研究の主目的は，上述の問いへの解答のため，$M(\theta)$，$M(\theta,2\pi)$，$M(\theta,\alpha;s,\beta)$上の錐双曲構造を具体的に構成し，それを標準的基本多面体族の観点から特徴付けることである．

３．研究の方法

主目的の達成にはいくつかのステップをクリアしていく必要がある．

(i) $M(\theta)$上の擬フックス構造に対して標準的基本多面体族を特徴付け，

(ii) そのような構造の変形の極限として新たなカスプを持つ構造を構成し，

(iii)　新たに生じたカスプを錐特異点集合へと変形し，

(iv) 錐角を2πまで増大する

というステップである．ステップ(i)における錐双曲構造は，Schlenker らにより無限遠等角構造による大域的パラメータづけが与えられた粒子付き擬フックス多様体と深く関わる．彼らの研究の一部を拡張しつつ，穴あきトーラス擬フックス群に対する Jorgensen 理論をフォード領域およびディリクレ領域へと拡張することで，$M(\theta)$上の標準的基本多面体族を特徴づける．ステップ(ii)においては新たなカスプを持つ構造が存在することを保障することが最も重要であると予想される．このステップは粒子付き擬フックス多様体に対する Ahlfors-Bers 理論の拡張として実現することを目指す．ステップ(iii)は Thurston による双曲デーン手術理論を応用することで新たなカスプを持つ構造の近くでは実現可能であることが期待される，先行研究との対比から，ステップ(iv)の実現のためには錐双曲構造とそのホロノミー表現との幾何学的対応に関する深い理解が必要になると思われる．その理解のため，適切な負曲率空間（CAT(−1)空間）

による分岐被覆とその等長変換群へのホロノミー表現により得られる位相型が普遍な負曲率空間の離散力学系の連続族を考察し，ステップ(iii)から(iv)で生じる PSL(2,ℂ)へのホロノミー表現が持つことが期待されるある種の非初等性を証明することを目指した．

４．研究成果

本研究課題で得られた成果を大別すると，Riley slice を含む２つの放物的元が生成する自由でないクライン群に関する決定的性質に対する詳細な証明，具体例に対して得られた標準的基本多面体族の組み合わせ構造に関する安定性の存在に関する観察と関連する数値実験，そして，コンパクトでない双曲錐多様体を基本多面体の立場から研究する際にネックとなるエンドの組合わせ的構造の解析に関する新たな視点の導入とその基礎理論の整備となる．

２つの放物的元が生成する自由でないクライン群に関しては，2002 年により Agol によりアナウンスされた ２ つの放物的元が生成する自由でないクライン群の決定という重要な定理に，大鹿健一氏，John Parker 氏，作間誠氏，吉田はん氏との共同研究により詳細な証明を与えることに成功した．この定理は２つの放物的元が生成する群のなす空間における Riley slice の補集合に含まれる離散群を決定するというものであり，本研究課題において中心的な興味の対象である図に関する基本的性質を数学的に明確にした．本研究課題の元となる理論により錐双曲構造を具体的に記述できる軌道体のホロノミー表現の像として得られることがすでに示されており，ここで得られた結果を本研究で対象とする対応物へと拡張するための基礎研究がひとつ完成したことになる．

本研究課題では，２次元球面を底空間とし，錐角πの錐特異点３点と錐角θの錐特異点１点を持つ ２ 次元錐多様体と直線の直積，およびそれに位相的操作を施すことにより得られる ３ 次元錐多様体が許容する錐双曲構造をフォード領域とディリクレ領域の族として定義される標準的基本多面体族を手がかりとして詳細に調べること基本方針とした．この方針のもと，最初のステップとして，先行研究における数値実験を通して近似的には正しいであろうと予想されていた，円周上の錐特異点を １ 点持つトーラス束を超楕円的対称性で割って得られる錐曲面束に対する標準的基本多面体族を詳細に観察した．錐角を ０ から少しだけ大きくするときのフォード領域からディリクレ領域のある種の安定性を示すことにより，いくつかの具体例に対して標準的理想多面体族の組み合わせ構造を決定することに成功した．研究の過程では，Jorgensen, Gueritaud らにより考察された，穴あきトーラス束の持つ「left-right 性質」が組み合わせ構造の記述と関わりを持つことが期待されるとの知見が得られ．一般の束の研究へと応用する方法を模索中である．

私の作間誠氏，和田昌昭氏，山下靖氏との共同研究で用いられた基本多面体はフォード領域と呼ばれるものであるが，その幾何学的双対として Epstein-Penner 理想多面体分割，さらにその一般化として EPH 分割が定義されている．本研究課題の研究を通して現れる最も困難な問題点の一つとして，多くの無限体積双曲構造に対するフォード領域は無限遠境界を持つため，その組み合わせ構造を固定した際の幾何的構造には大きな自由度があるというものがある．本研究課題における研究成果のうち，最も大きなものは，それをいかにコントロールするかということに関する新たな着想を得ると同時にその基礎理論を構築してきたことにある．その着想とは，上述のようにフォード領域（およびその類似としてディリクレ領域）のみを手がかりとして進める研究で問題となった無限遠境界の理解のため，実射影空間の部分集合として実現される双曲空間のクラインモデルにおいて EPH 分割の幾何学的双対を調べることで，無限体積双曲構造に対するフォード領域（ディリクレ領域）の自然な「コンパクト化」を得ることができるのではないかというものである．この観点から，秋吉・作間により予想され，Gueritaud により肯定的に解決された，一点穴あきトーラス-クライン群に対する EPH 分割の性質はさらに一般化されると期待される．２橋絡み目補空間に対する ASWY の変形族に対して数値実験を進めているが，これまでのところ，この期待を支持する結果が得られている．

この新たな着想により導入された「コンパクト化」を拡張されたフォード領域（拡張されたディリクレ領域）と呼ぶことにする．本研究ではその基礎理論の整備を行なった．そのため，まずは錐特異点を持たないカスプ付き双曲多様体を考察の対象とすると，そのフォード領域はカスプのホロ球体的近傍を固定してその切断の軌跡(cut locus)で切り開くことで得られる．同様に，ディリクレ領域は基点を固定してその切断の軌跡から得られる．この構成は，双曲空間を双曲面として包含する Minkowski 空間モデルに持ち上げると，いずれの領域も Minkowski 空間内の離散点集合の Minkowski 内積に関する二等分面が定める凸多面体と双曲面との交わりとして記述される．この構成を，双曲面と交わりをとることなく Minkowski 空間内の凸集合に着目するということを行い，それを双曲空間を開集合として包含する実射影空間に射影することで拡張されたフォード(またはディリクレ)領域は定義される．この状況のもと，凸核が内点を持つカスプ付き双曲多様体に対し，拡張されたフォード領域は真性凸(properly convex)集合であり，さらにこの領域はカスプに対応する正光的錐(positive light cone)の点集合の閉凸包の頂点における接錐の双対(polar dual)であることがわかった．さらに，付随する実射影構造の展開写像により拡張されたフォード領域を展開することができるが，その像もまた proper であることも示すことができた．これは双曲幾何の拡張とも考えられる実射影幾何構造を持つ多様体の研究にも非常に密接に関わるもので，将来的には無限体積双曲構造の実射影幾何構造の観点からの退化や遷移に関する重要な基礎をなすものと期待される．

　また，基礎理論のみならず，以下のような具体的対象に関する研究の進展もあった．本研究の着想の源となった二橋結び目錐双曲多様体の具体的構成に関する数値実験では，フォード領域およびディリクレ領域を組み合わせて考えることで，二橋結び目の橋曲面の擬フックス構造から二橋結び目錐双曲多様体へとつなぐ変形族で，組み合わせ構造の変化がある種の単調性を持つものの存在が期待されていた．その変形族はターゲットとする二橋結び目のスロープで折れ曲がる「有理折目多様体」の拡張として定義されるものである．錐特異点を持たない場合に，この有理折目多様体上の拡張されたフォード領域の組み合わせ構造は不変であることがわかった．
　最後に，拡張された基本領域に関する研究の副産物といえる次のような結果も得られた．拡張されたフォード領域は Minkowski 空間内のある凸集合の双対集合から定められるが，ディリクレ領域についても同様の構成を行うことにより，拡張されたディリクレ領域を考えることができる．今年度は，この双対性を有限体積双曲多様体のディリクレ領域の性質の研究に応用した．その結果，有限体積双曲多様体のディリクレ領域の組み合わせ構造は基点を任意に動かしても高々有限個しか現れないことがわかった．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Akiyoshi,Hirotaka	4．巻 2227
2．論文標題 An extension of Ford domain	5．発行年 2022年
3．雑誌名 数理解析研究所講究録	6．最初と最後の頁 53-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

1．著者名 Akiyoshi Hirotaka	4．巻 301
2．論文標題 Dirichlet domains for some one-cone torus bundles	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Topology and its Applications	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2020.107490	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Akiyoshi Hirotaka、Ohshika Ken'ichi、Parker John、Sakuma Makoto、Yoshida Han	4．巻 374
2．論文標題 Classification of non-free Kleinian groups generated by two parabolic transformations	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 1765～1814
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Hirotaka Akiyoshi	4．巻 264
2．論文標題 Thin representations for the one-cone torus group	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Topology and its Applications	6．最初と最後の頁 115-144
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.06.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　9件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 Hirotaka Akiyoshi	
2．発表標題 Finding Dirichlet domains	
3．学会等名 The 14th TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2023年	

1．発表者名 Hirotaka Akiyoshi	
2．発表標題 Finiteness of the combinatorial structures of Dirichlet domains	
3．学会等名 Iberoamerican and Pan Pacific International Conference on Topology and its Applications（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2023年	

1．発表者名 秋吉宏尚	
2．発表標題 Finding Dirichlet domains of hyperbolic manifolds by computer	
3．学会等名 研究集会「トポロジーとコンピュータ 2023」（招待講演）	
4．発表年 2023年	

1．発表者名 秋吉宏尚	
2．発表標題 閉双曲曲面のディリクレ領域に関する数値実験について	
3．学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー（招待講演）	
4．発表年 2023年	

１．発表者名
秋吉宏尚

２．発表標題
正八角形から得られる種数2の閉双曲曲面のディリクレ領域について

３．学会等名
拡大版「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）

４．発表年
2024年

１．発表者名
Hirotaka Akiyoshi

２．発表標題
An extension of Ford domain

３．学会等名
The 13th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2022年

１．発表者名
Hirotaka Akiyoshi

２．発表標題
An extension of Ford domain

３．学会等名
Intelligence of Low-dimensional Topology（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
秋吉宏尚

２．発表標題
ディリクレ領域の有限性について

３．学会等名
拡大 KOOK セミナー 2022

４．発表年
2022年

１．発表者名
秋吉宏尚

２．発表標題
双曲多様体の基本多面体と射影モデル

３．学会等名
研究集会「拡大KOOKセミナー2021」（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
秋吉宏尚

２．発表標題
錐特異点つきトーラス束のディリクレ領域について

３．学会等名
日本数学会　2022年度年会

４．発表年
2022年

１．発表者名
秋吉宏尚

２．発表標題
錐特異点つきトーラス束のディリクレ領域について

３．学会等名
研究集会「拡大KOOKセミナー2020」

４．発表年
2020年

１．発表者名
Hirotaka Akiyoshi

２．発表標題
Dirichlet domains for one-cone torus bundles

３．学会等名
Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

The 13th KOOK-TAPU and The 15th GSW http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/OCAMI/joint/KOOK-TAPU_&_GSW/index.html

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
The 13th KOOK-TAPU Joint Seminaron Knots and Related Topics and The 15th Graduate Student Workshop on Mathematics	2022年～2022年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関