

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：21601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03506

研究課題名（和文）Pin(2)モノポール方程式と4次元トポロジー

研究課題名（英文）Pin(2)-monopole equations and 4-dimensional topology

研究代表者

中村 信裕（Nobuhiro, Nakamura）

福島県立医科大学・公私立大学の部局等・教授

研究者番号：10512171

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：Pin(2)モノポール方程式を4次元多様体の族の上で考察することにより微分同相群のトポロジーへの応用を得た。スピン4次元多様体の族に対し、ある位相的な条件の下で族の Seiberg-Witten 不変量が 0 でないことを示し、応用として、位相的なファイバー束で、全空間は smoothable だがファイバー束としては smoothable でないものを構成した。スピノルディスム不変量を応用することで simple type 予想の mod 2 版のある位相的な条件の下で証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

我々の行った族の研究は、Pin(2)モノポール方程式によるものも、スピン多様体に対するものも、族のゲージ理論を実質的に発展させるものである。さらにその応用は微分同相群に対する新たな知見を切り拓くものものとなっている点が意義深い。また mod 2 simple type についての研究は、この四半世紀ほとんど進展が見られなかった simple type 予想を着実に前進させるものである点が意義深い。

研究成果の概要（英文）：Considering Pin(2)-monopole equations on families of 4-manifolds, we obtained some applications on topology of diffeomorphism groups of 4-manifolds. We proved a non-vanishing theorem of families Seiberg-Witten invariants for spin families of 4-manifolds. As an application, we construct topological fiber bundles such that their total spaces are smoothable, but they are non-smoothable as fiber bundles. By using spin bordism invariants, we prove the mod 2 version of the simple type conjecture is true under some topological conditions.

研究分野：ゲージ理論と4次元トポロジー

キーワード：ゲージ理論 4次元 トポロジー

## 1. 研究開始当初の背景

ゲージ理論の低次元多様体のトポロジーや幾何への応用は、80年代初めの Donaldson による 4次元多様体の交叉形式への応用以来 30年以上の歴史を持つ。

当初は Donaldson らによる  $SU(2)$ あるいは  $SO(3)$  Yang-Mills 理論が低次元トポロジーや幾何に応用されるほぼ唯一のゲージ理論であったが、1994年に Seiberg-Witten 方程式が登場してからは応用の中心は Seiberg-Witten 理論へとシフトした。

さらに今世紀に入ると Ozsvath-Szabo により Heegaard Floer 理論が建設され、比較的計算を進めやすいなどの理由からこの理論が低次元トポロジーと幾何の研究手法の大きな流れとなっていた。

しかしながら、Heegaard Floer 理論の流行により従来のゲージ理論が廃れてしまったかと言うと全くそうではなく、90年代の終わりには Seiberg-Witten 不変量の高次版といえる安定コホモトピー不変量が Bauer-Furuta(引用文献)によって定義され、さらに Manolescu によって Monopole Floer ホモロジーの安定ホモトピー版が構成されると同時に、安定コホモトピー不変量は境界付き 4次元多様体の相対 Seiberg-Witten 不変量へと一般化された。

別の流れとして、群作用がある状況、あるいは多様体の族といった、より発展的な状況に対するゲージ理論の考察・応用の流れがあり、筆者も群作用付き、および族の Seiberg-Witten 理論を研究し、いくつかの応用を得ている。

さらに 2008年に、本研究課題の中心テーマである  $Pin^-(2)$ モノポール方程式の枠組みを与える  $Spin^c$  構造が古田幹雄氏によって構成され、2010年筆者(引用文献)によってこの方程式は局所係数交叉形式の制約を得ることに応用された。

## 2. 研究の目的

$Pin^-(2)$ モノポール方程式は、Seiberg-Witten 方程式の変種であり、 $Spin^c$  構造の複素共役から得られる「捩れた」Seiberg-Witten 方程式というべきものである。より正確に言うなら、 $Pin^-(2)$ モノポール方程式は、局所的には Seiberg-Witten 方程式と同一の形をしているが、 $Spin^c$  構造と呼ばれる局所系に沿って複素構造が反転するような  $Spin^c$  構造の変種の上に定義される Seiberg-Witten 方程式である。

解析的な難しさは Seiberg-Witten 方程式と同等で、Seiberg-Witten 方程式と類似した様々な応用が可能であるが、局所系に沿って捩れていることから、通常の Seiberg-Witten 方程式のときとは異なる位相形をもつ多様体に対して非自明な応用をもつことがある。

特に、4次元多様体のトポロジーや幾何に様々な応用を持つ微分位相不変量である Seiberg-Witten 不変量の  $Pin^-(2)$ モノポール方程式を用いた類似物( $Pin^-(2)$ モノポール不変量)が定義されるが、しばしば、考えている 4次元多様体に対して、Seiberg-Witten 不変量が 0 だが  $Pin^-(2)$ モノポール不変量は 0 でない、あるいはその逆といったことが起こる。

$Pin^-(2)$ モノポール方程式を用いて、Seiberg-Witten 理論と平行なくいくつかの応用が筆者ら(引用文献)によってなされているが、その可能性はまだみ尽くされたとはいえない。そこで、本研究の主たる目的は、 $Pin^-(2)$ モノポール方程式の理論的および応用上のさらなる可能性を深く追求することであった。

## 3. 研究の方法

本研究開始の時点で  $Pin^-(2)$ モノポール理論の基本的理論構成と基本的な応用はある程度できていたので、Seiberg-Witten 理論の研究を推し進めた成果を  $Pin^-(2)$ モノポール理論に還元していく方策を目論んだ。その際に(族の)ゲージ理論、4次元トポロジー、ホモトピー論の専門家である、加藤毅氏、今野北斗氏、安井弘一氏、岸本大祐氏の協力を仰いだ。

## 4. 研究成果

(1)族のゲージ理論に関して主に三つの成果を得た。

一つ目は加藤毅氏、今野北斗氏との共同研究として行った 4次元スピンの多様体の族の Seiberg-Witten 不変量とその応用についての研究である。主結果は符号数が  $-16$  の 4次元スピンの多様体の族の Seiberg-Witten 不変量が族の Dirac 指数などの線形の不変量の情報だけで決定されるというもので、homotopy  $K3$  曲面に対する Morgan-Szabo の非自明性定理の族への拡張となっている。応用として、 $K3$  曲面にいくつかの二次元球面の直積を連結和したものに同相なファイバー  $M$  を持ち構造群が  $\text{Homeo}(M)$  であるトーラス上の族であって、構造群が  $\text{Diff}(M)$  に還元できないようなものを構成した。さらにこのことの帰結として、 $\text{Diff}(M)$  から  $\text{Homeo}(M)$  の埋め込み写像が弱ホモトピー同値写像でないことが証明される。また、このトーラス上の族は、(a)全空間は滑らかな多様体の構造を持つが、(b)ファイバー束としては構造群が  $\text{Diff}(M)$  に還元できないと言う意味で滑らかなファイバー束にできないような例となっている。以上の結果は論文にまとめられ、Compositio Mathematica (Volume 157, Issue 4, April 2021, pp. 770

- 808)から出版された .

二つ目は今野北斗氏との共同研究として行った  $\text{Pin}^-(2)$  モノポール方程式を用いて 4 次元多様体の族のトポロジーを調べる研究である . この研究は , David Baraglia 氏の Seiberg-Witten 方程式を用いた先行研究を ,  $\text{Pin}^-(2)$  モノポール方程式により拡張する研究で , 応用として  $\text{Diff}(X)$  と  $\text{Homeo}(X)$  が弱ホモトピー同値でない新しい系列の多様体を見出している . この研究は論文にまとめられ , Algebraic & Geometric Topology 23 (2023) 419-438 にて出版された .

三つ目は加藤毅氏 , 今野北斗氏との共同研究で , 滑らかな 4 次元多様体をファイバーに持つ円周上のファイバー束のペアで次の性質を持つものを構成した . ( ) 全空間は微分同相 , ( ) 位相的なファイバー束としては同型 , ( ) 滑らかなファイバー束としては同型ではない . このような例を具体的に構成したのはこの論文が最初と思われる . 上の の研究のトラス上の族が nonsmoothable なファイバー束だとすると , こちらは exotic なファイバー束の対であると言える . 証明には族のゲージ理論を用い , exotic なファイバー束を見分けるのに , Ruberman による微分同相写像に対する Seiberg-Witten 不変量の拡張を用いる . この結果は Proc. Amer. Math. Soc. 151 (2023), 2695-2705 において出版された .

(2)Seiberg-Witten 理論における simple type 予想に関する研究を行い , 主に二つの結果を得た .

一つ目は加藤毅氏 , 安井弘一氏との共同研究で simple type 予想の mod 2 版と言うべきものである . すなわち , モジュライ空間の次元が正のときの Seiberg-Witten 不変量が偶数であるための十分条件が多様体のコホモロジー環の条件として与えられるというものである . 証明では笹平裕史氏により構成された spin bordism Seiberg-Witten 不変量(引用文献 )を用い , これを adjunction 不等式と組み合わせるなどしてなされる . simple type 予想についてはこの四半世紀 , ほとんど進展がなかったので , この結果は重要なステップとなりうると考えられる . この結果は論文にまとめられ , J. Eur. Math. Soc. (2022)より出版された .

もう一つは加藤氏 , 安井氏に加え , ホモトピー論の専門家である岸本大祐氏に協力を仰ぎ行った研究である . この研究において , 緩やかな位相的な条件の下で , Seiberg-Witten 不変量の divisibility からモジュライ空間の仮想次元の上限が得られるという結果を得た . より具体的には , Seiberg-Witten 不変量が素数  $p$  の  $r$  乗で割り切れなければモジュライ空間の仮想次元は  $2r(p-2)-2$  以下であるというものである . 証明は Seiberg-Witten 不変量の安定コホモトピー群への持ち上げである Bauer-Furuta 不変量(引用文献 )を用い , ホモトピー論的考察によってなされるが , この研究では戸田ブラケットを用いた精緻なホモトピー群の計算を利用するなど , 高度なホモトピー論をゲージ理論に応用できた点は意義深い . この研究結果は論文にまとめられ (math arXiv:2111.15201) , 現在雑誌に投稿中である .

#### < 引用文献 >

S. Bauer and M. Furuta, A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: , Invent. math. 155 (2004), 1--19; S. Bauer, , 21-40.

Ishida, M., Sasahira, H.: Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number, I: non-vanishing theorem. Internat. J. Math. 26, (2015)

N. Nakamura,  $\text{Pin}^-(2)$ -monopole equations and intersection forms with local coefficient of 4-manifolds, Math. Ann. 357 (2013), no. 3, 915--939.

N. Nakamura,  $\text{Pin}^-(2)$ -monopole invariants, J. Differential Geom. 101 (2015), no. 3, 507--549.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kato Tsuyoshi, Nakamura Nobuhiro, Yasui Kouichi	4. 巻 -
2. 論文標題 The simple type conjecture for mod 2 Seiberg-Witten invariants	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/jems/1297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Konno Hokuto, Nakamura Nobuhiro	4. 巻 23
2. 論文標題 Constraints on families of smooth 4-manifolds from Pin(2)-monopole	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 419 ~ 438
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2023.23.419	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tsuyoshi Kato, Hokuto Konno and Nobuhiro Nakamura	4. 巻 157
2. 論文標題 Rigidity of the mod 2 families Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 770-808
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X2000771X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Nakamura	4. 巻 31
2. 論文標題 Real structures and the Pin(2)-monopole equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2050119 ~ 2050119
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X20501190	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Tsuyoshi、Konno Hokuto、Nakamura Nobuhiro	4. 巻 151
2. 論文標題 A note on exotic families of 4-manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2695-2705
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/16356	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 中村信裕
2. 発表標題 Upper bounds for virtual dimensions of Seiberg-Witten moduli spaces
3. 学会等名 Gauge Theory in Kyoto(京都大学, 2023.3.22-24) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 中村信裕
2. 発表標題 Homotopy non-equivalence of homeomorphism and diffeomorphism groups of spin 4-manifolds
3. 学会等名 研究集会「4次元トポロジー」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村信裕
2. 発表標題 Families Seiberg-Witten invariants and topology of spin families of 4-manifolds
3. 学会等名 研究集会 4-dimensional Topology and Gauge Theory
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

中村信裕のホームページ  
[https://kansai-gauge.squares.net/nakamura/Gauge Theory Seminar](https://kansai-gauge.squares.net/nakamura/Gauge%20Theory%20Seminar)  
<https://kansai-gauge.squares.net/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------