

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 26 日現在

機関番号：23903

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03515

研究課題名（和文）レヴィヒンチン型表現からの自由確率論の研究

研究課題名（英文）Research on free probability from the Levy-Khintchine type representation

研究代表者

佐久間 紀佳（Sakuma, Noriyoshi）

名古屋市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70610187

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：自由確率論における調和解析的表現であるR-変換においてレヴィヒンチン表現を考える。そのレヴィ測度を符号付測度まで許した場合その表現に対応する分布が存在する時、その分布を自由擬無限分解可能分布と呼ぶこととして、擬無限分解可能分布に対応する確率分布のクラスを自由確率論で導入した。そのクラスに入りかつ自由無限分解可能分布でないような例を数多く見つけた。また自由擬無限分解可能分布と同じ特性三つ組を持つ古典確率論における分布の例を見つけ、それらをつなぐことでBercovici-Pata全単射と呼ばれる無限分解可能分布と自由無限分解可能分布を結ぶ全単射の定義域を拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自由確率論はランダム行列などのサイズ極限における極限スペクトル分布に現れる関係をよく記述する道具として確率論では馴染み深い。本研究は其中でも分布間の関係を詳細に理解することを目的としており、その意味では近年数論などの純粋数学以外にも量子物理や統計物理をはじめとした物理学、通信理論、ファイナンス理論、機械学習理論など様々な分野で応用されているランダム行列理論に貢献することが期待できる。また他方で、無限分解可能分布と呼ばれるクラスは確率論でもレヴィ過程などの構成で基本的なクラスであるが、自由確率論でも同じような考え方ができ、ダイナミクスを表現するものの基本的な考えで意義があると考えている。

研究成果の概要（英文）：In the R-transform, which is a harmonic-analytic representation of free probability theory, we consider the Levy-Khintchine representation. When the Levy measure is allowed up to a signed measure, if there exists a distribution corresponding to that representation, we call that distribution a free quasi-infinitely divisible distribution, and we introduced a class of probability distributions corresponding to quasi-infinitely divisible distributions in free probability theory. We found many examples that fall into this class and are not freely infinitely divisible distributions. We also found examples of distributions in classical probability theory that have the same characteristic triplet as the free quasi-infinitely divisible distribution, and by connecting them, we extended the domain of the Bercovici-Pata bijection, which connects the infinitely divisible distribution and the free infinitely divisible distribution.

研究分野：確率論

キーワード：自由確率論 無限分解可能分布 レヴィ測度

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は無限分解可能分布の研究を行ってきた。その主たる部分は自由確率論における無限分解可能分布である。

無限分解可能分布は Paul Levy の独立確率変数の和の研究に端を発する。この段階でも例えば研究代表者が興味を持っているクラス  $L$  (自己分解可能分布のクラスとも言う) が現れている。その後、極限定理の研究の中で安定分布のクラスなどが深く調べられた。

無限分解可能分布の研究の主たる道具はフーリエ解析 (確率論でいう特性関数) である。無限分解可能分布の特性関数の表現としてレヴィ・ヒンチン表現と呼ばれるものが基本的な結果としてある。これは無限分解可能分布を非負の  $a$ , 実数  $\sigma$ ,  $\beta$  を用いて  $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{a|t|^\alpha}{\alpha} - \frac{\beta t}{1+i\beta t} \right)$  で特徴付けるものである。非負の  $a$  はガウスパート, 実数  $\beta$  は分布のシフトを表す。レヴィ測度  $\nu$  は複合ポアソン分布の極限に対応するパートを表すものである。このレヴィ・ヒンチン表現, 特にレヴィ測度は元の確率分布のさまざまな情報を与えてくれる。

確率分布で通常のレヴィ・ヒンチン表現は持たないが, このレヴィ測度を符号付き測度まで許せばレヴィ・ヒンチン表現を持つような確率分布のことを擬無限分解可能分布という。このような確率分布の存在は Linnik らの「Decomposition of random variables and vectors」(Translations of Mathematical Monographs, Vol. 48., 1977) による研究の頃から知られていたが, 系統的な研究はここ最近まで皆無であった。

一方, 自由確率論と呼ばれる作用素環論の自由群因子環の同型問題を動機とした非可換確率論が 1980 年代より発展してきている。これは Voiculescu により提唱されたもので, 特に 1990 年代 Voiculescu 自身によりランダム行列との関連が発見されたことで多くの研究者に興味を持たれるようになった。その影響もあり, 自由畳み込みとよばれる自由確率論における畳み込みの計算やそれに関連した自由調和解析の理論が発展した。

2000 年に自由確率論における無限分解可能分布 (自由無限分解可能分布という) と確率論の無限分解可能分布が一対一対応するという結果が得られた。その対応は Bercovici-Pata 全単射と呼ばれており, 自由確率論における  $R$ -変換 (フーリエ変換の対応物) に対する自由レヴィヒンチン表現と呼ばれる解析的表現でも対応が表される。なお自由無限分解可能分布も無限分解可能分布の場合と同様, その  $R$ -変換が非負の  $a$ , 実数  $\sigma$ ,  $\beta$  を用いて  $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{a|t|^\alpha}{\alpha} - \frac{\beta t}{1+i\beta t} \right)$  を自由三つ組と呼ぶこととする。

これらは全て自由確率論における極限定理の研究から発見されたブレイクスルーで, これをきっかけとしてより詳細な自由無限分解可能分布の構造に興味を持たれるようになった。このような中で研究代表者は自由無限分解可能分布やそのサブクラスの自由自己分解可能分布 (自由  $L$  分布) に興味を持ってそれを調べてきていた。

自由確率論における自由無限分解可能分布の明示的な例はまだまだ少ない。半円分布, マルシェンコ・パスツール分布と呼ばれる確率論におけるガウス分布, ポアソン分布に対応するもの以外では例は少ない。多くの場合その解析的変換は計算できても明示的には分布がかけないようなケースが多い。ちょっとでも摂動項を加えるとすぐにその計算が立ち行かなくなる。一方で, 具体的な計算はできなくても implicit な形での計算を継続することでいろいろな分布の情報を  $R$ -変換やレヴィ測度から得ることができる。たとえば自由無限分解可能であればその確率分布は高々一点のアトムをのぞき, ルベーク測度に絶対連続なパートのみになることが分かっている。確率論でいうポアソン分布のような離散無限分解可能分布は自由無限分解可能になりえない。

このような研究の流れの中で研究代表者はとある問題をきっかけに確率分布で通常の自由レヴィ・ヒンチン表現は持たないが, この自由レヴィ測度を符号付き測度まで許せば自由レヴィ・ヒンチン表現を持つ確率分布が存在しそうなことを数値計算から得た。これをきっかけに自由擬無限分解可能分布を導入しその構造を調べて見ようということ考えた。

## 2. 研究の目的

研究の目的の一つ目は研究の背景にある通り, 数値解析からその予想を立てた自由擬無限分解可能分布の存在を確認すること, この解析的表現から Bercovici-Pata 全単射の定義域を確認

できないか、ということである。

自由畳み込みとよばれる自由確率論における畳み込みの計算やそれに関連した自由調和解析の理論は Voiculescu がそれを導入して以降、大きく進展してきている。その同期は2つで一つは自由無限分解可能分布は畳み込み半群を生成するのでその様子を知るためにその対応する分布の性質を引き出すこと、もうひとつは複素関数論的な側面から従属操作 (subordination) を使った技術がどのようにつかえるかということである。これらの手法をうまく使って自由擬無限分解可能分布に対して自由無限分解可能分布とは異なる性質を見つけ出し、自由畳み込みに関連するより深い数学的な事実を拾い出すということが研究の一つの目的となる。

また研究成果の方でも書くが Bercovici-Pata 全単射の定義域を拡張する一つのアイデアになると考えた。無限分解可能分布と自由無限分解可能分布はそのレヴィヒンチン表現で対応しているので、極限定理由来でその定義域の拡張を考えるより、レヴィヒンチン表現のレヴィ測度をも少し緩い条件で考えれば Bercovici-Pata 全単射の定義域を拡張することが可能なのではないかと考えた。このアイデアを実現することが本研究課題の目的である。

### 3. 研究の方法

山口大学堀田一敬氏、Wroclaw 大学の Wojtek Mlotkowski 氏、北海道教育大学の植田優基氏との共同研究で中心部分の研究を行った。そのための共同研究者の訪問や関連する研究をおこなっている研究者の招聘などを行った。また、研究期間途中で派生したブル無限分解可能分布アイデアを得て解決するのに北海道大学長谷部高広氏との議論や統計数理研究所野場啓氏を訪問するなどを行った。研究期間は多くがコロナ禍の中であったのでオンラインで研究活動が継続できるようにそのためのカメラ・マイクなどの設備投資も行い、オンラインでの議論や研究成果発表を行った。

また本研究に興味をもち様々な助言をくれたメキシコ CIMAT の Octavio Arizmendi を10日間の訪問と1ヶ月弱の訪問をし、関連する様々な議論を行った。本研究についていくつかの講演の機会をもらい、京都大学や量子情報理論に関連する研究集会でニューヨーク大学アブダビ校を訪問し、そこで議論を重ねた。

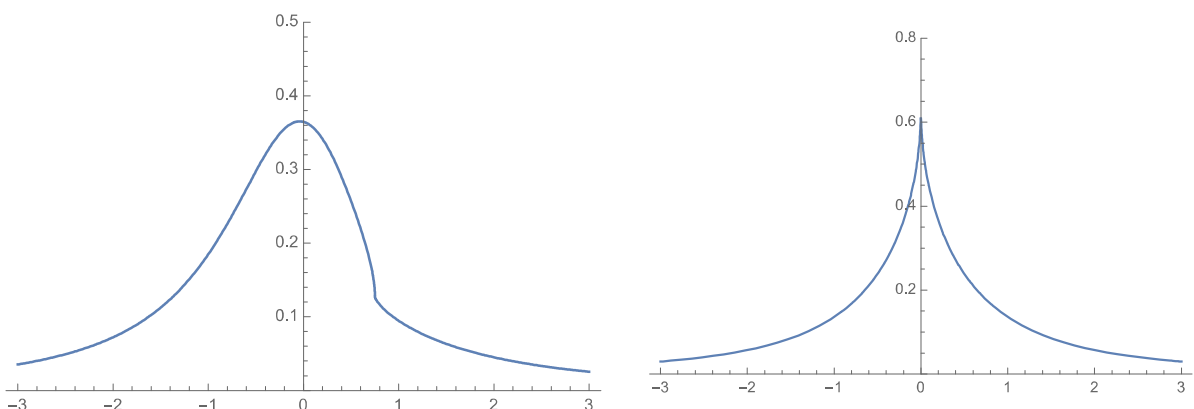
### 4. 研究成果

本研究課題の期間にまず主題である自由擬無限分解可能分布についての論文を山口大学堀田一敬氏、Wroclaw 大学の Wojtek Mlotkowski 氏、北海道教育大学の植田優基氏と作成し「On freely quasi-infinitely divisible distributions」としてアーカイブへ投稿(arXiv:2107.09473)、その後専門誌「ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics」へ投稿し、20 (2023), no. 2, 941–971 に掲載された。

まず、自由擬無限分解可能分布をレヴィヒンチン表現に基づいて定義した。まず自由レヴィヒンチンの表示式で自由レヴィ測度の部分を符号付き測度まで許して、拡張された自由三つ組  $(a, \nu, \eta)$  を考える。それが  $R$ -変換である、すなわちその形を  $R$ -変換としてもつ確率分布がそんざいするとき、その関数の形から確率測度は一意に定まるのでそれを自由擬無限分解可能分布と呼ぶことにした。

この定義により確率論と同様に確率分布の分解問題としての意味を持たせることができる。このことについては定義からほぼ自明にしたがう。次にその  $R$ -変換の表示からわかることを調べた。たとえば確率分布の性質を明らかにした。自由擬無限分解可能分布は自由無限分解可能分布と同様に高々一点のアトムをのぞき、ルベグ測度に絶対連続なパートのみになる。ただし、自由無限分解可能分布の時にように分布の滑らかさは保証されない。

次に自由擬無限分解可能分布を複素関数論の従属操作の方法を援用する形生成する方法を提案した。具体的には従属操作に使う分布をコーシー分布にするのである。コーシー分布はコーシー変換や逆数コーシー変換、 $R$ -変換などの形が非常によく計算が上手いく。コーシー分布と半円分布やマルシェンコ・パスツール分布などの自由畳み込みの意味での「引き算」を考えて自由擬無限分解可能分布を生成した。このやり方では少々分布の形は複雑になるが明示的にその確率分布を書くことができる。以下にいくつかその分布の概形を書く。先がとんがっているような形の分布や途中で微分不可能な点がしばしば登場するのが特徴的である。



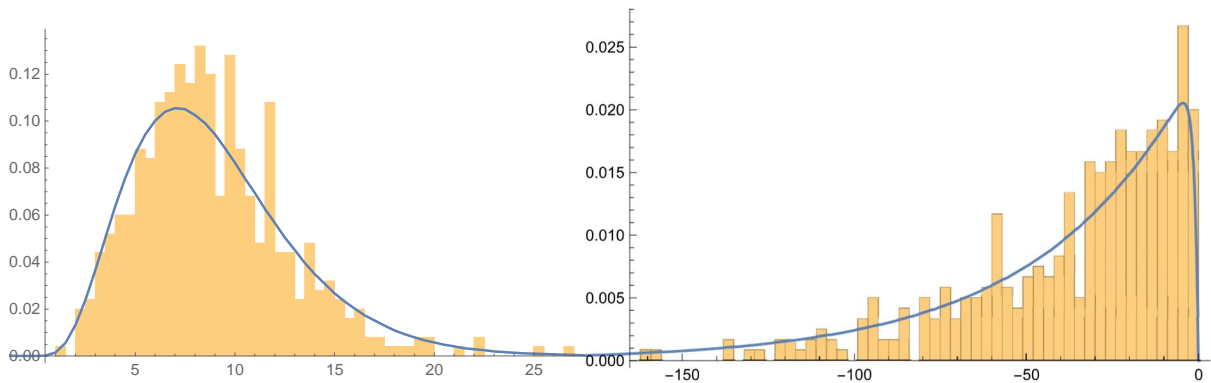
これらの点はレヴィ測度が負の値を持つ点に登場しており、レヴィ測度が負のアトムを持つことが確率密度関数の微分不可能性を示唆している。

次にこれらの生成方法で作った自由擬無限分解可能分布に対して、拡張された自由三つ組 $(a, \sigma, \tau)$ を確率論において考えたとき、擬無限分解可能分布が存在するかという問題が上がる。実際そのようなものが存在すれば、Bercovici-Pata 全単射をより広い確率分布のクラスに拡張できないかという Bozejko の問題を解いたことになる。確率論においてその関数がある確率分布のフーリエ変換であるか否かというのは肯定的なことを示すのは難しいがポイヤの定理という古典的な結果を使うことでその対応する確率分布が存在するケースが確認され、Bercovici-Pata 全単射が拡張できる部分を明示的に示すことができた。

副産物としてブール確率論における自己分解可能分布についての研究を行った。ブール確率論においては全ての確率分布がブール無限分解可能になりその解析的表現はレヴィヒンチン表現は持ちブール三つ組 $(a, \sigma, \tau)$ も考えられるものの、符号付き測度のレヴィ測度を考えた時点で対応する確率分布は存在しない。しかし、狭いほうの自己分解可能分布についてはブール自己分解可能分布を考えると正規分布がブール自己分解可能分布でないケースが発見された。具体的には平均/分散比にそれが依存することがわかった。これは確率論・自由確率論と大きく異なる点でブール確率論の場合には自己分解可能分布の単峰性なども成り立たないため、以下に自由確率論が確率論における無限分解可能分布の理論の痕跡をきれいに残しているか、という証拠になっている。この研究を北海道大学長谷部高広氏、統計数理研究所野場啓氏、北海道教育大学の植田優基氏と議論し論文「On Boolean selfdecomposable distributions」としてまとめ、Studia Math. 274 (2024), no. 2, 129–151 に掲載された。

また非可換確率論観点からのランダム行列に関連する研究も行った。いわゆるアウトライヤーとよばれるランダム行列の外れ固有値についての研究をかなり深めた。具体的には非可換確率論観点からのランダム行列のアウトライヤー研究で発見した巡回的単調独立性を実現する(非ランダムな)行列(のテンソルを使った)モデルを京都大学の Benoit Collins 氏とドイツ・ザールランド大学の Felix Leid 氏とともに見つけた。このモデルは単に巡回的単調独立性を実現するだけでなく、単調独立性を実現するモデルも構成できる。これにより「巡回的」な性質が出る場合をよりよく理解できるのはでないかと考えている。その結果を論文「Matrix models for cyclic monotone and monotone independences」としてまとめ、アーカイブに投稿後(arXiv:2202.11666)、専門誌に投稿中である。

それをもとにランダム行列のアウトライヤーの摂動についての研究を上記2名に加えて北海道大学長谷部高広氏と藤江克徳氏と行った。ランダム行列のアウトライヤーの摂動については必ずしもガウス型の摂動とはならず以下のような指数分布の混合のような分布が出ることもあることが確認できた。



このような結果は非自明で元のランダム行列の情報をどの程度復元できるかは興味深いと考えている。それを論文として「Fluctuations of eigenvalues of a polynomial on Haar unitary and finite rank matrices」としてまとめ、アーカイブに投稿後(arXiv:2309.15396)、専門誌に投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Hotta Ikkei, Mlotkowski Wojciech, Sakuma Noriyoshi, Ueda Yuki	4. 巻 20
2. 論文標題 On freely quasi-infinitely divisible distributions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics	6. 最初と最後の頁 941-941
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.30757/ALEA.v20-34	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Sakuma Noriyoshi, Suzuki Ryoichi	4. 巻 10
2. 論文標題 A modified $\psi$ -Sobolev inequality for canonical Levy processes and its applications	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Modern Stochastics: Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 145-173
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15559/23-vmsta220	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Maejima Makoto, Sakuma Noriyoshi	4. 巻 online first
2. 論文標題 Selfsimilar Free Additive Processes and Freely Selfdecomposable Distributions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-022-01227-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Maejima Makoto, Sakuma Noriyoshi	4. 巻 197
2. 論文標題 Rates of convergence in the free central limit theorem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 109802 ~ 109802
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2023.109802	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Endo Taiki, Chuo University, Japan, Katori Makoto, Sakuma Noriyoshi, Chuo University, Japan, Nagoya City University, Japan	4. 巻 18
2. 論文標題 Functional Equations Solving Initial-Value Problems of Complex Burgers-Type Equations for One-Dimensional Log-Gases	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Beno_t Collins, Felix Leid, Noriyoshi Sakuma	4. 巻 2202.11666
2. 論文標題 Matrix models for cyclic monotone and monotone independences	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1--10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.2202.11666	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 I, Hotta, W. Mlotkowski, N. Sakuma, Y. Ueda	4. 巻 446
2. 論文標題 On freely quasi-infinitely divisible distributions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート	6. 最初と最後の頁 22--34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mlotkowski, Wojciech and Sakuma, Noriyoshi and Ueda, Yuki	4. 巻 178
2. 論文標題 Free Self-decomposability and Unimodality of the Fuss-Catalan Distributions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1055-1075
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-020-02488-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 佐久間紀佳
2. 発表標題 非可換確率論における自己分解可能分布
3. 学会等名 確率論シンポジウム(京都大学, ハイブリッド)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐久間紀佳
2. 発表標題 非可換確率論からのアウトライヤーへのアプローチ
3. 学会等名 思考院セミナー(統計数理研究所, ハイブリッド)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 Selfsimilar free additive processes and freely selfdecomposable distributions
3. 学会等名 Math-Fi seminar(立命館大学, ハイブリッド)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐久間紀佳
2. 発表標題 非可換確率論によるアウトライヤーの考察と行列モデル
3. 学会等名 東京確率論セミナー(慶應義塾大学, オンライン)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 Selfsimilar free additive processes and freely selfdecomposable distributions
3. 学会等名 Seminario Interinstitucional de Matrices Aleatorias SIMA 2022, CIMAT (hybrid conference) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 前島信, 佐久間紀佳
2. 発表標題 自由加法・自由自己相似過程と自由自己分解可能分布について
3. 学会等名 2022日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 野場啓, 佐久間紀佳, 植田優基
2. 発表標題 プール自己分解可能分布について
3. 学会等名 2022日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木良一, 佐久間紀佳
2. 発表標題 カノニカルレヴィ過程に対する修正 -ソボレフ不等式とその応用
3. 学会等名 2022日本数学会年会
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 前島信, 佐久間紀佳
2. 発表標題 自由加法・自由自己相似過程と自由自己分解可能分布について
3. 学会等名 統計数理研究所共同研究会「無限分解可能過程に関連する諸問題」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐久間紀佳
2. 発表標題 自由擬無限分解可能分布について
3. 学会等名 九州確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 On free-quasi infinitely divisible distributions
3. 学会等名 第1回レヴィセミナー, オンライン
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 自由擬無限分解可能分布について
3. 学会等名 統計数理研究所共同研究会, 無限分解可能過程に関連する諸問題(25)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 On free-quasi infinitely divisible distributions
3. 学会等名 sakuma projectRMTQIML2020-2021 first online meeting, オンライン(国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐久間紀佳
2. 発表標題 自由擬無限分解可能分布について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会統計数学分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Noriyoshi Sakuma
2. 発表標題 Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices
3. 学会等名 Seminario de MAPLe (Matrices Aleatorias y Probabilidad Libre) (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ホームページ <a href="http://nsakuma.com/">http://nsakuma.com/</a>
---

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	堀田 一敬 (Hotta Ikkei) (10725237)	山口大学・大学院創成科学研究科・准教授  (15501)	
研究協力者	植田 優基 (Ueda Yuki) (40878120)	北海道教育大学・教育学部旭川校・講師  (10102)	
研究協力者	長谷部 高広 (Hasebe Takahiro)	北海道大学・理学研究科・准教授  (10101)	
研究協力者	野場 啓 (Noba Kei)	統計数理研究所・統計基盤数理研究系・助教  (62603)	
研究協力者	モウオトコウスキー ボイテック (Wojciech Mlotkowski)	ブロッツワフ大学	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計5件

国際研究集会 Mexico-Japan Probability Seminar	開催年 2022年～2023年
国際研究集会 Workshop on Non-commutative Probability	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Seminario Interinstitucional de Matrices Aleatorias SIMA 2022	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Mexico-Japan Probability Seminar	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Interactions between commutative and non-commutative probability	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------