

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03517

研究課題名(和文) Erdelyiサイクルの高次元化とその交叉数から捉える超幾何関数の接続問題

研究課題名(英文) Connection problems of hypergeometric functions from the view point of higher dimensional Erdelyi cycles and their intersection numbers

研究代表者

三町 勝久 (Mimachi, Katsuhisa)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：40211594

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：Appellの F_2 , F_3 , Hornの H_2 , Olssonの F_P の積分表示を見つけ、これらの接続関係を求めた。Lauricellaの E_D 方程式に関する、ある接続関係式を構成することにより、 A 型 Heckman-Opdamの超幾何関数のHarish-Chandra展開についての示野 玉岡の予想を示した。Lauricellaの E_A 方程式に関する接続問題を明示的に導いた。Appellの E_1 方程式に付随する接続問題をほぼ最終的な形で解いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、常微分方程式や完全積分可能な偏微分方程式である超幾何微分方程式の解に対する接続問題を解くことを主題としているが、複素解析的線形微分方程式の解の大域的性質を明らかにするために、その解がみたす接続関係を決定せよという問いは最も基本的であり究極的である。しかし、いっぽうで、接続問題が解けている例は非常に少ない。今回得た結果は、解の大域的理論のさらなる発展の礎になるものと期待される。

研究成果の概要(英文)：We found integral representations of Appell's F_2 , F_3 , Horn's H_2 and Olsson's F_P functions, and determined some connection formulas among them. We constructed a connection relation associated with Lauricella's E_D equations, and, as its application, we give an affirmative answer to the conjecture by Shimeno-Tamaoka about the Harish-Chandra expansion of the Heckman-Opdam hypergeometric function of type A . We solved a connection problem associated with Lauricella's E_A equations explicitly. We solved the connection problem associated with Appell's E_1 equation almost in the final form.

研究分野：解析学基礎, 多変数超幾何関数の解の大域的性質の研究

キーワード：複素解析的線形微分方程式, 超幾何関数, 接続問題, Erdelyiサイクル, 交叉数, Appellの超幾何関数, Lauricellaの超幾何関数, ねじれサイクル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

一変数超幾何関数論の成功に刺激されて、1880年に Appell が F_1, F_2, F_3, F_4 という 2 変数超幾何関数を導入し、1893年に Lauricella が F_D, F_A, F_B, F_C という n 変数版を導入し、1931年に Horn がいくつかの 2 変数超幾何関数を追加した。これらを古典的多変数超幾何関数という。いっぽう、1980年代後半、Heckman-Opdam および Macdonald が対称空間上の球関数が従う微分方程式をルート系に従って一般化し、Gelfand らは Grassmann 多様体上の超幾何関数および A_n 超幾何関数の理論を創始し、Aomoto らによる複素積分の研究が共形場理論の Dotsenko-Fateev 方程式や Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の研究と結びついた。これら 80 年代後半に進展したものをまとめて現代的な多変数超幾何関数という。

古典的・現代的いずれの多変数超幾何関数も極大過剰決定系もしくは完全積分可能な偏微分方程式(系)をみたし、超幾何微分方程式とよばれるものになる。

この超幾何微分方程式の接続問題、解けているものは非常に少なく、確定特異点型常微分方程式では、一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$, アクセサリーパラメータの無い常微分方程式の理論に現れる Simpson の Even-Odd 族、共形場理論における Dotsenko-Fateev 方程式の場合、二変数では、Appell の F_1, F_2, F_3 のとき、しかも、 F_2 と F_3 は実質的に同じと思ってよいので、けっきょくは F_1 と F_2 の二つの場合だけ、そして、3 変数以上の場合は、皆無である。それほど、接続問題は難しい。

2. 研究の目的

Appell, Lauricella による古典的多変数超幾何関数から Heckman-Opdam の超幾何関数や Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解などの現代的超幾何関数に至るまでの接続問題を総合的に考察し、一般の n 変数で解ける接続問題の例を発見・蓄積し、系統的な整理によって次の段階へ発展させることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

Erdelyi サイクルの高次元化とねじれホモロジー理論における交叉数を用いるという独自の方法を採用する。前者は最近発想したアイデアであり、後者は一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ に付随する接続問題を解くために導入したアイデアである。具体的には、解の基本系を積分により与えることで、解の接続関係を対応するサイクルの一次関係式に帰着させ、その関係式をサイクル同士の交叉(交点)数のみならず性質から決定するという流れで解くことになる。

4. 研究成果

(1) Horn の H_2 関数と Olsson の F_P 関数に関する接続問題: Diekema-Koornwinder は、 H_2 関数と F_P 関数の積分表示とそれらのみならず関数等式を、Stieltjes 変換のアイデアを背景にした複雑な計算により与えたが、 H_2 も F_P も E_2 方程式の解ゆえ、接続問題として捉えるのが本筋だろうと思い、結果的に、それら関数の Euler 型積分表示を見つけ、予定通りに接続問題として定式化し、彼らの予想も一通り解決した。いっぽう、Diekema-Koornwinder の論文に引用されていた Olsson の論文には、 E_2 に関するいくつかの接続公式が明示的に与えられていたのだが、 E_2 の解空間がこのように豊かとは思っていなかったので衝撃的だった。

(2) Lauricella の E_D 方程式に関する接続問題: E_D 方程式の特異点 $(1, \dots, 1)$ における正則解を原点の近傍における解の基本系で表示するという形の接続問題を Erdelyi サイクル上の積分を用いることにより解き、それを応用して A 型 Heckman-Opdam の超幾何関数(の特別な場合)の Harish-Chandra 展開における \mathcal{S} 関数が先の接続問題の接続係数に他ならないという示野玉岡の予想を示した。

(3) Lauricella の E_A 方程式に関する接続問題: 2 変数の場合 (Appell の F_2 の場合), Horn の H_2 関数と Olsson の F_P, F_Q, F_R 関数が E_2 の解空間の様子を調べるためには重要であるが、これらの多変数版を Erdelyi サイクル(の高次元版)を用いて明示的に導いた。そして、

それを利用することによって、複数の接続公式を導いた。

(4)Appell の E_1 方程式の接続問題: E_1 方程式の定義域の実への制限は12個の単連結領域の和となるが、それぞれの連結成分が接する3重点をブローアップすれば、いずれも5角形となり、その5頂点から二つを選んで行き来する総計 $12 \times \binom{5}{2} = 120$ 組の接続関係(等式の個数は720個)を求めることが基本的な問題となる。この場合の解の基本系における級数解は、2個の F_1 函数と1個の(Hornの) G_2 函数で与えられるが、これらの積分表示式は、普通のサイクル2個と、Erdelyi サイクル1個に対応する。そして、これらのサイクルの満たす接続関係をねじれサイクルの交叉数を用いることで求め、結果的に、解の基本系の満たす接続公式を求めた。この計算には、いままでにない交叉関係式が必要であったが、上手く工夫することでなんとか計算できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Katsuhisa Mimachi	4. 巻 383
2. 論文標題 Connection formulas related with Appell's hypergeometric function ${}_2F_1$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 PoS (Proceedings of Science)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.22323/1.383.0010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Katsuhisa Mimachi	4. 巻 74
2. 論文標題 Integral representations of Appell's F_2 , F_3 , Horn's H_2 and Olsson's F_P functions,	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1, 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.74.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuhisa Mimachi	4. 巻 74
2. 論文標題 Connection formulas related with Appell's F_2 , Horn's H_2 and Olsson's F_P functions,	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 15, 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.74.15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Katsuhisa Mimachi
2. 発表標題 Appellの ${}_2F_1$ 方程式系の解の接続問題
3. 学会等名 アクセサリー・パラメーター研究会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Katsuhisa Mimachi
2. 発表標題 Application of the intersection theory to the connection problem related with differential equations
3. 学会等名 MathemAmplitudes 2019 : Intersection Theory and Feynman Integrals, 18--20 December 2019, University of Padova, Padova, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Katsuhisa Mimachi
2. 発表標題 微分方程式に付随する接続問題への交叉理論の応用
3. 学会等名 `q, q and q, '' 神戸大学理学部, 2020.2.19--21 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関