

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03522

研究課題名（和文）開リーマン面のモジュライを用いた多変数関数論の新展開

研究課題名（英文）Research on variations of the moduli of open Riemann surfaces under pseudoconvexity

研究代表者

濱野 佐知子 (Hamano, Sachiko)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：10469588

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：有限種数 $g$ の標識付き開リーマン面 $R$ と実 $g$ 次元ベクトルから定まる、開リーマン面 $R$ の方向モジュライを新しく定義し、その幾何学的意味を明らかにした。また、複素多変数の観点から、複素助変数 $t$ をもつ開リーマン面 $R(t)$ の変形族を考察し、各 $R(t)$ の方向モジュライに対して $t$ についての2階変分公式を確立した。その応用として、ファイバーが同じ位相の型からなる開リーマン面 $R(t)$ の変形族からなる全空間が2次元擬凸領域ならば、 $R(t)$ の方向モジュライは劣調和であることを証明し、その幾何学的性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

コンパクト複素多様体の解析族に対する剛性は小平-Spencer理論をふまえて解決済みであるが、開リーマン面の変形族に関するものは未解決である。無限型リーマン面の分類理論が示すように、開リーマン面のもつ複素解析的にもポテンシャル論的にも極めて豊富な多様性は、開リーマン面の変形族や変形空間にも及ぶはずである。そこで、本研究ではそのような開リーマン面の変形族に対しても、西野利雄氏の剛性定理に代表される擬凸領域の一様性定理がどこまで成立するかを問い、全空間の擬凸性を反映する良いモジュライを構成することで、開リーマン面のモジュライを用いた多変数関数論の展開を試みた。

研究成果の概要（英文）：For a marked open Riemann surface  $R$  of finite genus  $g$  and a real  $g$ -vector  $a = (a_1, \dots, a_g)$ , we introduced the  $a$ -span of  $R$ , defined in terms of canonical semi-exact differentials on  $R$  normalized by  $a$ , and established a new relation between the  $a$ -span and the moduli disk of closings of  $R$ . From the viewpoint of several complex variables, a variational formula of the  $a$ -span of  $R(t)$  is obtained for a smooth family of open Riemann surfaces  $R(t)$  with a complex parameter  $t$  in a disk. As an application, we proved that if the total space is a two-dimensional pseudoconvex domain fibered by open Riemann surfaces  $R(t)$  of the same topological type, then the  $a$ -span of  $R(t)$  is subharmonic for  $t$ . This means the subharmonicity of the diameter of the  $a$ -directional moduli disk for higher genera when the total space is pseudoconvex.

研究分野：数学・基礎解析学

キーワード：解析学 複素解析 多変数関数論 擬凸領域 リーマン面 モジュライ 等角写像

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

多変数複素正則関数が定義される領域は、複素  $n$  次元空間で擬凸状であることが知られている。1変数複素関数では表出しない擬凸領域、そしてその一般化であるスタイン多様体の形状を多角的（複素解析的、微分幾何学的、代数幾何学的）な観点から理解することは、この100年に渡って多変数関数論の指導原理となってきた。西野利雄氏の剛性定理（1969）を、山口博史氏（1976）は開リーマン面の变形族に対する対数容量の変動の解析、すなわちグリーン関数のロバン定数が擬凸変動で優調和性を示すことを発見し、ファイバーが族  $O_G$ （グリーン関数が存在しないリーマン面全体のなす族）に属する開リーマン面の变形族に拡張することに成功した。その後、米谷文男-山口博史氏（2004）は開リーマン面の变形族におけるファイバー上のベルグマン計量の動きを複素助変数の2階変分で明記し、この変分公式からリーマン面の変動が擬凸ならばベルグマン計量は対数的多重劣調和であることを示した。B.Berndtsson氏（2006、2009）はこれを高次元に拡張し、その結果を用いた辻元氏や高山茂晴氏による代数幾何への応用がある。研究代表者はグリーン関数の代わりに、等角写像と密接な関係にありリーマン面上に与えられた特異点・特徴的な境界挙動を持つ調和関数（L.Sarioの主関数）を考察することで、他の等角不変量に対する新たな変分公式を確立した（2011、2014、2016）。これらの変分公式を手がかりに、全空間の擬凸性を反映する等角不変量の変動理論の定式化が可能ではないかという着想に至った。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、2次元擬凸領域をそこで定義された正則関数の定数面・ファイバーの族として捉えたとき、ファイバー上に全空間の擬凸性を反映する良いモジュライを新たに構成することで、2次元擬凸領域のモジュライ理論を展開することである。とくに領域の擬凸性の影響による剛性定理を定式化し（全空間が直積領域と双正則同値であるための必要十分条件などを求める）その応用として、種数正の開リーマン面の擬凸変動に対する同時一意化定理を改良・拡張することに挑む。具体的には、複素助変数  $t$  をもつ開リーマン面  $R(t)$  の族に対して、各リーマン面の等角写像に関連したモジュライが複素多変数的に変動するものを定式化し、1変数的大量変動と多変数関数論、特に領域の擬凸性との関連を引き起こす原理を追求する。

### 3. 研究の方法

リーマン面がコンパクトであるならば、その位相的性質は種数で、解析的性質はそのモジュライで、完全に決定される。一方で、無限型リーマン面の分類理論が示すように、開リーマン面のもつ複素解析的にもポテンシャル論的にも極めて豊富な多様性は、リーマン面の变形族や变形空間にも及ぶはずである。そこで、本研究はそのような開リーマン面の分類に対しても、西野利雄氏の剛性定理に代表される擬凸領域の一意性定理がどこまで成立するかを問い、全空間の擬凸性を反映する良いモジュラスを探し出すことで、開リーマン面のモジュライを用いた多変数関数論を展開する。

得られた研究成果は、国内外のシンポジウムおよび学会等で口頭発表を行い、関連する国際雑誌に投稿し査読付き論文として完成を目指した。また、researchmapにて研究成果の積極的な公開を行った。さらに、関数論およびその関連分野の大学院生・若手研究者に発表の場を提供し、若手研究者育成を目的とする国際研究集会などを企画し活動を支援した。

### 4. 研究成果

(1) 山口博史氏は「西野の剛性定理」をファイバーがグリーン関数の存在しない族  $O_G$  に属する開リーマン面の变形族へ拡張できることを証明した。研究代表者はグリーン関数の代わりに、垂直・水平截線領域への等角写像と密接な関係にあるリーマン面上に与えられた特異点・特徴的な境界挙動を持つ調和関数（Sarioの主関数）を考察することで、Schiffer スパンや調和スパンに対する新たな変分公式を確立し“理想境界が小さいリーマン面の族”の中で一番大きい族  $O_{\text{AD}}$  に属する単葉型リーマン面の同時一意化に成功した。これらの歴史的背景を含めた、主関数の変分公式と応用についてまとめたサーベイは、査読付論文として *Advanced Lectures in Mathematics* 49 (2022) に掲載された。

(2) 有限種数2以上の開リーマン面  $R$  に対する擬凸性を反映する良いモジュライとして、 $R$  から同種数閉リーマン面  $S$  への等角的埋め込みで得られる周期行列を用いて新しいスパンを定義した。そのスパンの擬凸変動における剛性について得られた研究成果を *Oberwolfach 数学研究所* で発表し、*Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report* (2019) に掲載された。

(3) 有限種数2以上の開リーマン面  $R$  の同種数閉リーマン面  $S$  への等角埋め込みが誘導する、 $S$  の周期行列の各対角要素全体は上半平面内の閉円板であることが S.Schmieder-柴雅和氏によって示されている。しかし、種数2以上の場合、 $R$  の内部に限らず理想境界上にも分岐点が存在

し得るため、 $R$  の変動を考察するために複素助変数  $t$  を導入すると、 $R(t)$  の理想境界の貼り合わせに付随する新たな自由度（種数 1 の開リーマン面からなる変形族の場合には現れなかった困難）が生じた。これを打破するため擬凸性を反映する良いモジュライを新たに構成する必要があった。そこで、1 以上の有限種数  $g$  の標識付き開リーマン面と実  $g$  次元ベクトルから定まる、開リーマン面の方向モジュライを新しく定義し、その幾何学的意味を明らかにした。また、複素多変数の観点から、開リーマン面の変形族を考察し、各ファイバーの方向モジュライに対して複素助変数  $t$  についての 2 階変分公式を確立した。その応用として、ファイバーが同じ位相の型からなる開リーマン面の変形族のトータルスペースが 2 次元擬凸領域ならば、各ファイバーの方向モジュライは劣調和であることを証明し、その幾何学的性質を明らかにした。この研究成果は査読付論文として *Mathematische Zeitschrift* (2021) に掲載された。

(4) これまでの研究成果で得られた単葉型リーマン面の Schiffer スパン、調和スパン、有限種数正の開リーマン面の方向モジュライとの関係、および、それらの変分公式と 2 次元擬凸領域の剛性への応用について比較したサーベイ論文が、査読付論文として *Birkhauser/Springer* (印刷中) に受理された。

(5) 柴雅和氏との共同研究で、種数 2 以上の有限種数標識付き開リーマン面が、ジューゲル上半空間上の点を一意に定めることを明らかにした。また、種数 2 以上の有限種数標識付き開リーマン面から、同じ種数の閉リーマン面への等角埋め込みの全体を考え、その全体がジューゲル上半空間上でどのような集合になっているかを特徴付けた。得られた研究成果を *Oberwolfach Workshop 2331*、第 24 回多変数関数論葉山シンポジウムなどの国際研究集会で発表し、論文としてまとめて投稿した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hamano Sachiko	4. 巻 20
2. 論文標題 Subharmonicity of a span associated with the moduli disk	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report (Oberwolfach Workshop 2331-Teichmuller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum; Jul.30-Aug.4, 2023)	6. 最初と最後の頁 1857--1860
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/OWR/2023/33	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hamano Sachiko	4. 巻 -
2. 論文標題 Directional moduli and pseudoconvexity (accepted: 17 July 2023, 印刷中)	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The conference in the honour of 65th birthday of Athanase Papadopoulos entitled `Essays on geometry` (Birkhauser/Springer)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hamano Sachiko	4. 巻 49
2. 論文標題 Variational formulas for principal functions and applications	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advanced Lectures in Mathematics 49: Teichmuller Theory and Grothendieck-Teichmuller Theory (Ed. L. Ji, A. Papadopoulos, W. Su), Higher Education Press, Beijing	6. 最初と最後の頁 29--50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hamano Sachiko	4. 巻 300
2. 論文標題 On rigidity of pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces according to directional moduli	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 979 ~ 993
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-021-02822-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hamano Sachiko, Yamaguchi Hiroshi	4. 巻 15
2. 論文標題 Pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces of the same topological type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report (Oberwolfach Workshop 1836-New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups)	6. 最初と最後の頁 2475 ~ 2534
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/OWR/2018/40	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計22件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Subharmonicity of a span associated with the moduli disk
3. 学会等名 拡大版「リーマン面・不連続群論拡大研究集会」第一部：松江THEファイナル (島根大学) (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 領域の変動に関する2階変分公式と擬凸領域
3. 学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会 (九州大学 西新プラザ) (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Subharmonicity of a span associated with the moduli disk
3. 学会等名 2023年度研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 Subharmonicity of a span associated with the moduli disk
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop 2331-Teichmüller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum (The Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, ドイツ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 Subharmonicity of a span associated with the moduli disk
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXIV (Shonan village center, JAPAN) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 The period matrices of an open Riemann surface and its closings in the Siegel upper half space
3. 学会等名 2022年度「リーマン面・不連続群論」研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 The period matrices of an open Riemann surface and its closings in the Siegel upper half-space
3. 学会等名 Workshop: Quasi-conformal mappings, hyperbolic geometry and Riemann surfaces (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Variational formulas for hydrodynamic differentials and application to the simultaneous uniformization problem
3. 学会等名 2022年度 多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 The period matrices of an open Riemann surface and its closings in the Siegel upper half-space
3. 学会等名 Conference in honor of 65th birthday of Athanase Papadopoulos (Galatasaray University, トルコ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 The period matrices of an open Riemann surface and its closings in the Siegel upper half space
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 On rigidity of pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces according to directional moduli
3. 学会等名 Prospects of Theory of Riemann Surface
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 On rigidity of pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces according to directional moduli
3. 学会等名 大阪市立大学数学研究所談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 The period matrices of an open Riemann surface and its closings in the Siegel upper half space
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 The hydrodynamic period matrices and closings of an open Riemann surface of finite genus
3. 学会等名 東京大学・複素解析幾何セミナー（東京大学大学院数理科学研究科）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 On variational formulas for hydrodynamic differentials and its application
3. 学会等名 The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on "Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems"（大阪市立大学）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Rigidity of the directional moduli on pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces
3. 学会等名 2019年度多変数関数論冬セミナー (東北大学 AIMR本館) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 開リーマン面のモジュライの多変数的性質について
3. 学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会 (東北大学 情報科学研究科) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 On variational formula for hydrodynamic differentials and its application
3. 学会等名 The 25th Symposium on Complex Geometry (石川県政記念しいのき迎賓館) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Rigidity of the directional moduli on pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces
3. 学会等名 東京大学・複素解析幾何セミナー (東京大学大学院数理科学研究科) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sachiko Hamano
2. 発表標題 Rigidity of the directional moduli on pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces
3. 学会等名 Riemann surfaces and Teichmüller theory (Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, ロシア) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 Pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces of the same topological type
3. 学会等名 名城大学・ポテンシャル論セミナー (名城大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 濱野佐知子
2. 発表標題 流体力学的微分の変分公式とその応用について
3. 学会等名 大阪大学幾何セミナー(大阪大学大学院理学研究科) (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 数学セミナー編集部	4. 発行年 2023年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 208
3. 書名 数学者の選ぶ「とっておきの数学」(第2部: 岡の上空移行の原理(濱野佐知子))	

〔産業財産権〕

〔その他〕

「researchmap」 [https://researchmap.jp/hamano\\_sachiko](https://researchmap.jp/hamano_sachiko)  
 「京都産業大学研究者データベースシステム」 <https://gyoseki.kyoto-su.ac.jp/ktsuhp/KgApp?resId=S000535>  
 「2022 CIMPA Schools (Varanasi) scientific committee」 <https://www.cimpa.info/en/node/7081>  
 「大阪市立大学研究者総覧」 [https://research-soran17.osaka-cu.ac.jp/html/100000808\\_ja.html](https://research-soran17.osaka-cu.ac.jp/html/100000808_ja.html)  
 「OCAMI共同利用・共同研究 Riemann surfaces and related topics」 <https://sites.google.com/view/riemann-klein2021-ocami/home>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	柴 雅和  (Shiba Masakazu)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Riemann surfaces and related topics -In memory of Professor Yoichi Imayoshi	開催年 2022年～2022年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------