

令和 5 年 6 月 29 日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03530

研究課題名(和文) Koornwinder多項式の退化隣接関係と安定性の解析・明示公式の構成

研究課題名(英文) Degeneration scheme and explicit formula for Koornwinder polynomials

研究代表者

星野 歩 (Hoshino, Ayumu)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号：30598280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)： 鈎型のウェイトを持つC型Macdonald多項式をルートの長さを等しくするパラメタの特殊化のもとで、先行研究で得られた一行型と一列型の明示公式を用いて記述し、一行型と一列型の積を鈎型で展開するPieri型公式を得た。このPieri公式は逆に解くことが可能な解析的Pieri公式である。これよりパラメタを一般化し、C型的退化Koornwinder多項式について同様のPieri型公式の予想式を得た。

また、先行研究ではパラメタ t を0に特殊化した場合のB型Macdonald差分作用素の漸近自由解についてA型漸近自由解での分規則を予想したが、A型漸近自由解の隣接関係式等を構成のもとで証明を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

解析的Pieri公式は、A型を除くとC型の一部でのみ構成されている。本研究ではC型Macdonald多項式について一行型と一列型の積を鈎型の多項式で展開する解析的Pieri型公式やC型的退化Koornwinder多項式の場合の予想式を得たが、これより、一般のウェイトやパラメタに付随するMacdonald-Koornwinder多項式の解析的Pieri公式の構成が期待される。漸近自由解においてはA型以外の完全な結果はなく、本研究で得たパラメタを特殊化したB型漸近自由解の結果から、パラメタを特殊化しない場合や他の型の漸近自由解の構成が期待される。これらから、本研究成果の学術的意義はあると考える。

研究成果の概要(英文)： We obtained a Pieri type formula which is an expansion by the Macdonald polynomials with hook diagrams for the multiplication of the polynomials with one row and one column diagrams of type C. This Pieri type formula is analytic version of usual Pieri formula, which was firstly constructed by Lassalle and Schloser for the Macdonald polynomials of type A. Moreover, we conjectured a similar analytic Pieri type formula for the type C degenerations of the Koornwinder polynomials.

On the other hand, we gave an explicit formula for the asymptotically free eigenfunctions of the q -Toda operator of type B, which was conjectured by our previous research.

研究分野：表現論, 量子可積分系

キーワード：Macdonald多項式 Koornwinder多項式 Pieri公式 漸近自由解 明示公式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

A型ルート系に付随するA型Macdonald対称多項式は、Schur多項式の q, t 変形であり量子可積分系に現れるJack多項式の q 変形である。その拡張としてMacdonaldは単純型ルート系に付随する対称ローラン多項式を定義し、Koornwinderは B_n, C_n, D_n 型Macdonald多項式を含む BC_n 型対称ローラン多項式(Koornwinder多項式)を定義した。Koornwinder多項式は、 q, t, a, b, c, d という6つのパラメータを持ち、パラメータ a, b, c, d の特殊化で最終的に B_n, C_n, D_n 型Macdonald多項式に退化する。これらの多項式は

1. 単項対称多項式に関する展開がウェイト λ に関し三角的
2. 各型に応じた q -差分作用素の固有関数(各型に応じた固有値も定義されている)

という2条件で特徴づけられる。以降、ウェイト λ と自然数の分割 μ を同一視する。ここで、任意の自然数の分割 μ に対するA型Macdonald多項式の明示公式は

1. 半標準盤(タブロー)を用いたタブロー表示(Macdonaldの結果)
2. q -差分作用素の固有関数である漸近自由解(野海-白石の結果)

が知られており、我々の先行研究においては、A型変形 W 代数を用いてA型Macdonald多項式のタブロー表示を構成し、また、 q -差分作用素の漸近自由解に中島が構成したA型量子群の最高ウェイト表現の結晶基底 $B(\lambda)$ の多面体表示が現れることを発見した。 gl_1 型トロイダル量子群からA型変形 W 代数が構成されるという我々の結果と、 gl_1 型トロイダル量子群の退化操作でA型量子群が得られることから、A型Macdonald多項式はその明示公式を介し、 gl_1 型トロイダル量子群から派生する代数構造を持つ。

一方、A型以外の場合については、一般の分割 μ に対するMacdonald-Koornwinder多項式の明示公式や、対応する代数構造は明確には知られていない。これに関し、我々の共同研究において得られていた先行研究の結果を次に挙げる：

1. 一行型分割 (r) に対する B_n, C_n, D_n 型Macdonald多項式(以下「一行型 B_n 型Macdonald多項式」などと呼ぶ)、一行型 BC_n 型Koornwinder多項式の超幾何級数的な明示公式
2. Askey-Wilson多項式(BC_1 型Koornwinder多項式)の漸近自由解の構成
3. 一行型 C_n, D_n 型Macdonald多項式のタブロー表示の構成
4. A型以外の単純型量子群の最高ウェイト表現の結晶基底の多面体表示

2. 研究の目的

本研究の目的は、A型ルート系に付随するMacdonald多項式の明示公式と対応する代数構造の関係を、A型以外のルート系に付随するMacdonald-Koornwinder多項式についても理解することである。具体的には B, C, D 型ルート系に付随するMacdonald多項式について同様の関係を見出したいと考える。そのためにそれら多項式の明示公式を構成する必要があるが、最終的に B, C, D 型Macdonald多項式に退化する BC 型ルート系に付随するKoornwinder多項式を扱うことで、統一的な理解を得られる可能性がある。よって適宜Koornwinder多項式を扱うこととする。

上記を踏まえ、本研究の具体的な直近の目的は、Macdonald-Koornwinder多項式の諸性質を調べ、明示公式を構成することである。Koornwinder多項式は、付随する BC 型ルート系のルート長の長さに対応した4種のパラメータ(A型Macdonald多項式のパラメータ t を除く)を持ち、パラメータの特殊化で最終的に B, C, D 型ルート系に付随するMacdonald多項式に退化するが、特に一列型Koornwinder多項式においては、4種のパラメータを3種、2種、1種と段階的に特殊化すると各段階における“退化Koornwinder多項式”各々が、 B, C, D 型Macdonald多項式に退化する前段階の多項式になっており、かつ、最も基本的な対称多項式である単項対称多項式から、各段階における退化Koornwinder多項式を復元する遷移行列を書き下すことができる(退化隣接関係)。このような事実から、一般パラメータのKoornwinder多項式の諸性質を調べ、明示公式を構成するためには、然るべきパラメータの特殊化のもとで諸性質を調べ、明示公式を構成することが必要となる。

3. 研究の方法

A型以外のMacdonald-Koornwinder多項式の明示公式については、我々の結果を含む先行研究において、一行型と一列型のKoornwinder多項式の明示公式が得られていたが、二行型や二列型以上のMacdonald-Koornwinder多項式の明示公式については、 C 型Macdonald多項式においての

ルートの長さが等しくなるようなパラメタの特殊化のもとで、二行型の多項式の明示公式が Lassalle によって与えられていたのみであった。Lassalle の結果では、2つの一行型の多項式の積を二行型の多項式で展開する“解析的”Pieri 公式を構成し、matrix inversion を用いた非自明な応用(“逆に解く”)として二行型の多項式を一行型の多項式の積の和で表す明示公式が得られている。通常の Pieri 公式は matrix inversion の構成が難しく“逆に解く”ことが容易ではない。A 型の場合は、Lassalle-Schlosser が解析的 Pieri 公式を構成し、同様の議論で一般の分割に対応する Macdonald 多項式の明示公式を構成していた。以上から、我々の第一の研究方法として、Lassalle が扱った C 型 Macdonald 多項式において、然るべき分割に対応する多項式の解析的 Pieri 公式を構成することを採用した。

また、Macdonald 差分作用素の漸近自由解の構成については、我々の先行研究において、次の予想式を構成していた：

- (1) B₂, C₂ 型 Macdonald 多項式
- (2) ルートの長さが等しくなるようなパラメタの特殊化のもとでの C₂ 型 Macdonald 多項式、
長方形型のウェイトを持つ C₃ 型 Macdonald 多項式
- (3) A 型の C 型による分規則
- (4) パラメタ t を 0 に特殊化したもとで B 型の A 型による分規則。

ここに、(3)については、Lee-Rains-Warnaar がより一般的な形で解決したため、その他の場合の予想式を証明することを我々の第二の研究方法として採用した。

4. 研究成果

ルートの長さが等しくなるようなパラメタの特殊化のもとで、鉤型の分割に対応する C 型 Macdonald 多項式を、先行研究で得られた一行型と一列型の明示公式を用いて記述し、一行型と一列型の積を鉤型で展開する解析的 Pieri 公式を構成した。これをもとに、C 型 Macdonald 多項式に退化するようなパラメタを持つ C 型的退化 Koornwinder 多項式について同様の解析的 Pieri 公式の予想式を構成した。今後の直近の課題として、予想式の証明と並行して、この解析的 Pieri 公式を応用し、C 型的退化 Koornwinder 多項式の明示公式の予想式を構成することが挙げられる。また、上記鉤型の分割に対応する C 型 Macdonald 多項式の明示公式の構成にあたり、Fock 空間に作用する Koornwinder の差分作用素の自由場表示を構成し適用することによって、一行型と一列型 Koornwinder 多項式の明示公式の構成要素である核関数たちが満たす核関数関係式を証明した。これは、Atai による結果の Koornwinder の差分作用素の自由場表示による別証明となっている。

また、先行研究ではパラメタ t を 0 に特殊化した場合の B_n 型 Macdonald 差分作用素の漸近自由解 (B_n 型 q-戸田関数と呼ばれる) について A_{n-1} 型漸近自由解 (A_{n-1} 型 q-戸田関数) での分規則を予想したが、A_{n-1} 型漸近自由解の n 項間隣接関係式と分規則に現れる展開係数が満たす漸化式を構成することで、予想の証明を得た。この結果をもとに、一般のパラメタ t についての同様の分規則の構成を目指したいと考える。A 型漸近自由解に A 型量子群における結晶基底の多面体表示が現れることを鑑みると、先行研究で得られている A 型以外の単純型量子群における結晶基底の多面体表示の活用が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Hoshino Ayumu, Ohkubo Yusuke, Shiraishi Jun'ichi | 4. 巻 111 |
| 2. 論文標題 Branching formula for q-Toda functions of type B | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 126, 134 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-021-01461-7 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 星野歩、白石潤一 | 4. 巻 16 |
| 2. 論文標題 Branching Rules for Koornwinder Polynomials with One Column Diagrams and Matrix Inversions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) | 6. 最初と最後の頁 84, 111 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------------|
| 1. 著者名 星野歩、仲田研登 | 4. 巻 60 |
| 2. 論文標題 Polyhedral realizations of crystal bases $B(\)$ for quantum algebras of nonexceptional affine types | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 091704, 091760 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5043554 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件／うち国際学会 0件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 星野歩 |
| 2. 発表標題 鉤型C型Macdonald多項式の明示公式とPieri型公式 |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッション特別講演（招待講演） |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 星野歩 |
| 2. 発表標題 一行型, 一列型, 鈎型Macdonald-Koornwinder多項式の明示公式とPieri型公式 |
| 3. 学会等名 神戸可積分系セミナー |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 星野歩、大久保勇輔、白石潤一 |
| 2. 発表標題 変形Koornwinder作用素とC型Macdonald多項式I |
| 3. 学会等名 日本数学会年会 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 星野歩、大久保勇輔、白石潤一 |
| 2. 発表標題 変形Koornwinder作用素とC型Macdonald多項式II |
| 3. 学会等名 日本数学会年会 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 星野歩 |
| 2. 発表標題 Pieri formula for Macdonald polynomials of type C with hook type diagrams |
| 3. 学会等名 第36回リー代数サマーセミナー |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 星野歩 |
| 2. 発表標題 Brunching Rules for Koornwinder polynomials with One Column Diagrams and Matrix Inversions |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）『表現論とその組合せ論的側面』 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 星野歩, 白石潤一 |
| 2. 発表標題 Conjecture concerning B_n q-Toda eigenfunctions |
| 3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2019年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-----------|---|--|----|
| 研究 分担者 | 白石 潤一 (Shiraishi Jun'ichi) (20272536) | 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601) | |

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-----------|--------------------------------|-----------------------|----|
| 研究 協力者 | 野海 正俊 (Noumi Masatoshi) | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|