

令和 6 年 5 月 27 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03531

研究課題名(和文)複素解析の視点と数式処理的手法による有理関数の幾何学的性質の研究

研究課題名(英文) Research on the geometric properties of rational functions from the viewpoint of complex analysis and using methods of algebraic computation

研究代表者

藤村 雅代 (Fujimura, Masayo)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群
・教授

研究者番号：00531758

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：ブラシュケ積がもつ幾何学的な性質は、他のいくつかの古典的な幾何学の定理との類似性がある。しかし、ブラシュケ積は単位円板上で正則な有理関数であるため、考える領域が円板に限られるという制約があった。本研究で新たにブラシュケライク写像を導入できたことで、円板以外の領域でこの類似性を調べることが可能にした。また、国際共同研究として、三角比距離などの距離についての研究も行った。これらの研究において、予想をたてる際には数式処理システムを用いて計算実験を行うとともに、代数方程式の導出などにも数式処理的な手法を用いている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ブラシュケライク写像を導入できたことで、ブラシュケ積が持つ幾何学的性質と古典的な幾何の定理との関連を円板以外の領域で調べることが可能にする道筋をつけた。国際共同研究で扱っている距離の一つである三角比距離は球面上での光の反射と関連がある。そのため、他分野(惑星科学)の研究者からの要望に応える形で、楕円面上での光の反射に対応する三角比距離の研究も行った。さらに、本研究で使用した数式処理的な手法も他の研究者から引用されその分野での成果につながっている。このように、研究手法そのものも他分野への影響を与えている。

研究成果の概要(英文)：Some geometric properties of the Blaschke product are similar to some other classical theorems in geometry. The Blaschke product is a holomorphic rational function on the unit disk. Therefore, domains treated by the compared theorems are also limited to disks. As one of the results of this study, it was possible to introduce the Blaschke-like maps. This allows us to compare and study the above geometric similarities in non-disk domains. In addition, we studied the intrinsic metric as international collaborations.

Algebraic computation methods were effectively used in this study, including the use of algebraic computation systems to derive conjectures through computer experiments.

研究分野：複素解析学

キーワード：有理関数 幾何学的関数論 数式処理

1. 研究開始当初の背景

次の有理関数を d 次ブラッシュケ積と呼ぶ。

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^d \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \quad (a_k \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}).$$

特に $\theta = 0, B(0) = 0$ を満たすとき、 B は標準ブラッシュケ積と呼ばれる。

$0, a, b$ に零点を持つ 3 次標準ブラッシュケ積に対して、単位円周上の点の逆像を結ぶ三角形が、2 点 a, b に焦点を持つ楕円に接することを Daepf らが示した(2002)。単位円周上の点をパラメータとすれば、逆像を結んだ直線族の包絡線がこの楕円と一致する。このように、ブラッシュケ積 B の逆像から作られる直線族の包絡線を B の内部曲線と呼ぶ。

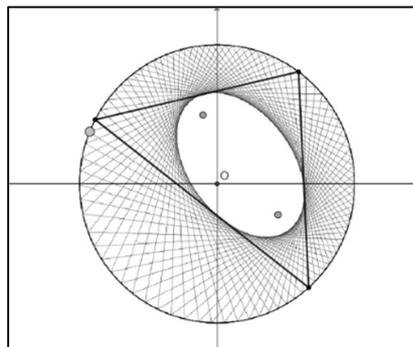


図 1 : 3 次ブラッシュケ積の内部曲線(楕円)

Daepf らの定理は、古典的なチャップル オイラーの定理 (三角形の外接円の半径 R , 内接円の半径 r , 外心と内心の距離 d は $d^2 = R^2 - 2rR$ をみたと) も関連があり、単位円を外接円とする三角形に内接する楕円は 3 次ブラッシュケ積の内部曲線に限ることが知られている(Frantz, 2004)。さらに、この定理と点 a, b に固有値を持つ特別な行列の数域 (numerical range) の関連性を Gorkin らが研究している。

4 次ブラッシュケ積については、内部曲線は 6 次の代数曲線となり、定義方程式は複雑なものとなるが、代表者は「4 次ブラッシュケ積の内部曲線が楕円になるのは、与えられた 4 次ブラッシュケ積が 2 つの 2 次ブラッシュケ積の合成で書けるときに限る」ことを示した(2013)。この結果は、4 角形が同時に内接円と外接円を持つ条件を与えた古典的なフースの定理 (1797) の拡張を与えている。さらに、Gorkin ら(2017)により、この結果にシフトオペレータからの意味づけが与えられた。

一方 d 次ブラッシュケ積に対して、逆像における接線の交点の軌跡を外部曲線と呼ぶ。代表者は d 次ブラッシュケ積の外部曲線が高々 $d - 1$ 次の代数曲線になること(2017)と、内部曲線と外部曲線の間にある種の双対性があること(2018)を示した。

このように、研究開始当初においてこの分野の研究の発展はめざましく、新たな性質や他分野との関連性が次々と発見されていた。

領域 $G \subset \mathbb{R}^n$ の点 $x, y \in G$ に対して、その三角比距離は次で与えられる

$$s_G(x, y) = \sup_{z \in \partial G} \frac{|x - y|}{|x - z| + |z - y|}.$$

三角比距離の性質に関する研究はフィンランドの Vuorinen 氏を中心としたグループで盛んに行われている。しかしながら、未解決の問題が残っている。さらに、上記の定義式の中の上限を与える点の存在は示せるが、それを具体的に求めるのは領域 G が半平面のときなど、単純な領域を除いて難しいことが知られている。

2. 研究の目的

本研究では、主に以下の「有理関数」の幾何学的性質に関する問題を扱う。

- (1) ブラッシュケ積が持つ幾何学的性質を調べる研究
ブラッシュケ積の像や逆像が持つ性質を複素解析の視点と数式处理的な手法で解析する。作用素など他分野とも関連がある研究である。
- (2) 三角比距離に関する研究
三角比距離に関して、いくつかの未解決予想を解決することを目的とした海外の研究者との共同研究である。さらに、三角比距離を一般化した Barrlund metric についても距離公式の構成などの基礎的な研究を行う。
- (3) その他
上記 (1)、(2) の研究の過程において派生する問題も解決を目指す。研究では計算実験のみでなく、式変形などにおいて数式処理システムも積極的に利用する。複素解析の問題の解決に使用可能な数式処理システムを用いた新たな解法を開発することも研究目的の一つである。

3. 研究の方法

- (1) 本研究の成果として導入できたブラシュケライク写像は、その構成に等角変形を利用している。しかし、領域を定めたとしても、円板からその領域への等角変形は一般には一つに定まらないため、ブラシュケ積の逆像を持つ幾何学的性質を継承するものを選ぶ必要があった。そのため、数式処理システムを用いた実験や描画による検証を行った。実験を踏まえて、望ましい性質を持つ等角写像を選ぶとともに、予想を立てて数学的に定式化することで数学的に証明を行う、という研究手法を用いている。
- (2) 三角比距離などの距離の問題を扱う研究は、フィンランドおよびルーマニアの研究者と国際共同研究を行った。コロナ禍ではあったが、オンライン/ネットワーク上での議論を順調に進めることができた。数値実験や数式処理の手法による問題の変形を行うことで、予想が正しいか否かを精査した。そのうえで、反例の構成もしくは証明を行うという手順で研究を進めた。
- (3) 扱う問題の一部には数式処理を用いた今までの手法が適用できないものがあり、新たな手法を導入する必要が生じた。そのため、数式处理的な手法(代数幾何的な手法)のなかから扱う問題に適用できそうなものを取り入れる試みを行った。下記の研究成果(3)には、それにより得られた結果が含まれている。

4. 研究成果

研究目的(1)から(3)に対して、それぞれ次の成果が得られた。

- (1) ブラシュケ積は単位円板上の正則関数であるため、ほかの幾何学的な定理との比較は、円板上に関するものに限定されていた。

本研究において、等角変形を用いることで境界が楕円または放物線の領域で定義されるブラシュケライク写像を導入することができた。さらに、楕円上で定義されるブラシュケ写像として、ブラシュケ写像の幾何学的性質を受け継ぐものと受け継がないもの双方を構成できたことで、等角変形をうまく選ばないとブラシュケ写像の性質を受け継ぐものが構成できないことも判明した。この成果は、以下の関数論の論文誌に掲載された。

M. Fujimura, Y. Gotoh, Geometric properties of Blaschke-like maps on domains with a conic boundary, *Computational Methods and Function Theory*, **24**, 2 (2024), 389-413. DOI: 10.1007/s40315-023-00499-z (査読あり) SharedIt: <https://rdcu.be/dk2g0>

また、ここで導入したブラシュケライク写像を利用した以下の成果の発表を行った。

3次ブラシュケライク写像を利用することで、チャップル オイラーの定理の拡張を与える定理を示した。

M. Fujimura, An extension of Chapple's formula by Blaschke-like maps, 京都大学数理解析研究所講究録, **2255** (2023), 32-38. (査読なし)

楕円板上のブラシュケライク写像から定まるブラシュケ多角形の中心に関する性質が得られた。これは、入れ子になった楕円の間のポンスレー多角形の中心に関する性質 (Schwartz-Tabachnikov, 2016) の類似の結果である。

藤村 雅代, On the centers of polygons for Blaschke-like maps, 京都大学数理解析研究所(公開型) 2023. 12. において口頭発表

- (2) 三角比距離に関連する研究として、フィンランドの Vuorinen 氏、ルーマニアの Mocanu 氏と以下の国際共同研究を行った。

三角比距離に関する研究からの派生問題として、ある距離空間の部分空間上に新しい距離関数を導入し、すでによく研究されている他の距離関数との比較を行った。また、この距離に関して、quasiregular 写像の下での歪曲定理を扱った。得られた成果は以下の複素解析分野の論文誌に掲載された。

M. Fujimura, M. Mocanu and M. Vuorinen, A new intrinsic metric and quasiregular maps, *Complex Analysis and its Synergies*, **7**, 6 (2021), 1-8. DOI: 10.1007/s40627-021-00066-z (査読あり) SharedIt: <https://rdcu.be/cfUaK>

三角比距離の一般化となる Barrlund's 距離に関する研究を行った。双曲距離などの距

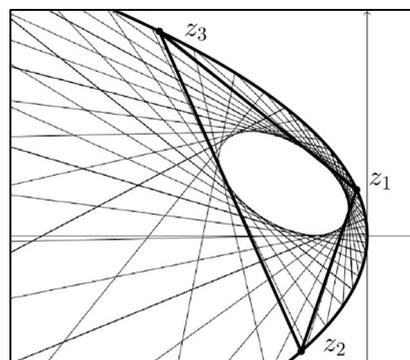


図2：放物線領域で定義されたブラシュケライク写像の内部曲線(楕円)

離と性質などを比較した。また、単純な領域において距離公式を与えた。得られた成果は以下の複素解析分野の論文誌に掲載された。

M. Fujimura, M. Mocanu and M. Vuorinen, Barrlund's distance function and quasiconformal maps, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**, 8 (2021), 1225-1255. DOI: 10.1080/17476933.2020.1751137 (査読あり)

考えている領域が球体(球面)であるとき、三角比距離を求めることは光学のアルハゼンの問題を解くことと同値になる。自身らの先行研究で得られている結果に対して、「楕円体(楕円面)上で同様の結果が得られれば実問題に応用可能になる」という他分野(惑星科学)の研究者からの要請に回答する形で得られた結果が以下の複素解析分野の論文誌に掲載された。

M. Fujimura, M. Mocanu and M. Vuorinen, The Ptolemy-Alhazen problem and quadric surface mirror reflection, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **68**, 11 (2023), 1880-1898. DOI: 10.1080/17476933.2022.2084537 (査読あり)

(3) 派生問題などとして、以下の問題を扱った。

フィンランドの Vuorinen 氏および Rainio 氏との国際共同研究として、双曲距離に関する 5 点定理 (G. Wang (2020)) に関連する問題に取り組んだ。具体的には、5 点定理の別証明を与え、球面上での同様の定理を示した。これは、研究成果 (2) の派生問題である。Wang の手法とは異なり、交点を解を含む代数方程式を構成することで、具体的な点の座標も求めているが、その際に新たな数式処理的な手法を導入し、複数の代数方程式の解が一直線上にあることを示している。この成果は、論文誌に掲載されることが確定している。

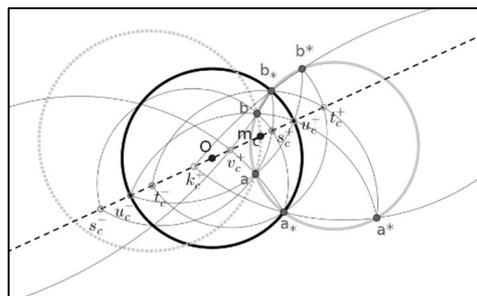


図 3 : リーマン球面上の 10 点定理を平面に射影したもの

M. Fujimura, O. Rainio and M. Vuorinen, Collinearity of points on Poincaré unit disk and Riemann sphere, *Publicationes Mathematicae Debrecen*. (to appear). (査読あり)

誤差を抑えた有理関数のジュリア集合の描画を目指して、関東学院大の大墨氏および香川高専の近藤氏と区間数を用いた内点保障についての研究を行った。

(4) その他、査読のない報告として以下を発表している。

藤村 雅代, ポアソナカレ円板に関する 5 点定理について, 数式処理 **30**:1 (2024.1), 21--24.

大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 区間演算を用いた反復計算について, 数理解析研究所講究録 **2255** (2023.6), 26--31.

藤村 雅代, Alhazen problem の方程式と catacaustic curve について, 数式処理 **29**:1 (2023.1), 5--8.

大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 反復計算での式の展開について, 数式処理 **28**:2 (2022.7), 132--135.

藤村 雅代, 円板上の intrinsic metric に関する計算実験, 数式処理 **28**:1 (2022.4), 20--23.

大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 反復計算における式の展開方法の検討について, 数式処理 **28**:1 (2022.4), 16--19.

藤村 雅代, Barrlund の距離関数とその距離公式について, 数式処理 **27**:2 (2021.8), 5--8.

藤村 雅代, Barrlund の距離関数について, 数式処理 **27**:1 (2021.1), 31--34.

M. Fujimura, On the duality property of Blaschke products and its application, 数理解析研究所講究録 **2159** (2020.6), 1--10.

大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 数式処理による反復計算について, 数理解析研究所講究録 **2159** (2020.6), 11--17.

M. Fujimura, The geometry of finite Blaschke products: some duality results, 数理解析研究所講究録 **2138** (2019.12), 147--155.

大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 反復計算への区間演算の適用について, 数理解析研究所講究録 **2138** (2019.12), 59--63.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fujimura Masayo, Rainio Oona, Vuorinen Matti	4. 巻 -
2. 論文標題 Collinearity of points on Poincare unit disk and Riemann sphere	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen. (to appear)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujimura Masayo, Gotoh Yasuhiro	4. 巻 24
2. 論文標題 Geometric Properties of Blaschke-Like Maps on Domains with a Conic Boundary	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Computational Methods and Function Theory	6. 最初と最後の頁 389 ~ 413
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40315-023-00499-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Fujimura Masayo, Mocanu Marcelina, Vuorinen Matti	4. 巻 68
2. 論文標題 The Ptolemy-Alhazen problem and quadric surface mirror reflection	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Complex Variables and Elliptic Equations	6. 最初と最後の頁 1880 ~ 1898
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/17476933.2022.2084537	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujimura Masayo, Mocanu Marcelina, Vuorinen Matti	4. 巻 66
2. 論文標題 Barrlund's distance function and quasiconformal maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Complex Variables and Elliptic Equations	6. 最初と最後の頁 1225 ~ 1255
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/17476933.2020.1751137	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujimura Masayo、Mocanu Marcelina、Vuorinen Matti	4. 巻 7
2. 論文標題 A new intrinsic metric and quasiregular maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Complex Analysis and its Synergies	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40627-021-00066-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計20件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 ブラシュケ多角形の中心について
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2024
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 On the centers of polygons for Blaschke-like maps
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大墨 礼子、近藤 祐史、藤村 雅代
2. 発表標題 区間演算を用いた充填ジュリア集合の内点保障
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 ポアンカレ円板に関する5点定理について
3. 学会等名 日本数式処理学会第32 回大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Five-point theorem on the Poincare unit disk
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 An extension of Chapple's formula by Blaschke-like maps
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大墨 礼子、近藤 祐史、藤村 雅代
2. 発表標題 区間演算を用いた反復計算について
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Alhazen problem の方程式と catacaustic curve について
3. 学会等名 日本数式処理学会第31回大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Catacaustic curve と Alhazen の問題
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大墨 礼子、近藤 祐史、藤村 雅代
2. 発表標題 反復計算での式の展開について
3. 学会等名 日本数式処理学会合同分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 円板上の intrinsic metric に関する計算実験
3. 学会等名 日本数式処理学会 第30回大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大墨 礼子、近藤 祐史、藤村 雅代
2. 発表標題 反復計算における式の展開方法の検討について
3. 学会等名 日本数式処理学会 第30回大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Computer experiments on an intrinsic metric
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Barrlund の距離関数とその距離公式について
3. 学会等名 日本数式処理学会 第29回大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 On the duality property of Blaschke products and its application
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大墨 礼子、近藤 祐史、藤村 雅代
2. 発表標題 数式処理による反復計算について
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Geometry of finite Blaschke products: interior and exterior curves
3. 学会等名 2019年度等角写像論・値分布論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤村 雅代
2. 発表標題 Barrlund の距離関数について
3. 学会等名 日本数式処理学会 第28回大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masayo Fujimura
2. 発表標題 Geometry of finite Blaschke products: pentagons and pentagrams
3. 学会等名 The Fifteenth Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masayo Fujimura
2. 発表標題 Geometry of finite Blaschke products: duality and its applications
3. 学会等名 Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions III (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フィンランド	University of Turku			
ルーマニア	Vasile Alecsandri University of Bacau			