様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　研究成果報告書

令和　４ 年　 ５ 月　 ６ 日現在

機関番号：１０１０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2021

課題番号：１９Ｋ０３５３２

研究課題名（和文）漸近的表現論と確率モデルのスケール極限の融合的な研究

研究課題名（英文）Interplay between asymptotic representation theory and scaling limits in probability models

研究代表者

洞　彰人（Hora, Akihito）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：１０２１２２００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：巨大な群の作用の構造を解明するため、群の表現の特性量がもつ統計的な性格に着目するのが、漸近的表現論の骨子となる考え方である。漸近的表現論と確率モデルのスケール極限について、双方向性を意識した融合的な研究を展開することが、本研究の基本的な枠組である。本研究では、群の表現のさまざまな場面に現れるヤング図形の集団や表現の分岐則を記述する分岐グラフを対象とし、時空のスケール極限によって得られるヤング図形のマクロな極限形状の時間発展や分岐グラフの彼方にある理想境界など、群の作用の漸近挙動と確率的な特性を反映するモデルを取り扱った。このようなモデルの構築とその性質の解明において、いくつかの研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
確率的な考え方は現代科学の幅広い分野に浸透している。ネットワーク科学の発展に伴って大規模な構造を取り扱う必要が増していることも、その一因であろう。古典的なフーリエ解析から発展した表現論・調和解析は、対称性を指導原理とし、複雑な物を単純な因子に分解して理解しようという洗練された数学理論である。本研究の基盤となる漸近的表現論のアイデアの核心は、確率論と表現論の融合である。ランダムで複雑な現象の解明に数学を用いてアプローチしようとする際に、有力な視座を与えることが期待される。本研究では、対称群やヤング図形といった具体的な対象に即したモデルを精密に解析することにより、その融合の一つの相を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：A primary idea of asymptotic representation theory is found in noticing statistical characters of representation-theoretical quantities for a group in order to reveal the structure of the actions of a huge group. The fundamental framework of this project develops a bilateral interplay between asymptotic representation theory and scaling limits for probability models. In this project, based on ubiquitous Young diagram ensembles in group representations and branching graphs describing the branching rules for representations, we treated several models reflecting asymptotic behavior and probabilistic features of group actions. They include time evolution of the macroscopic limit shapes of Young diagrams obtained through space-time scaling limits, and ideal boundaries beyond branching graphs. In constructing these models and investigating their properties, we reached several fruitful results.

研究分野：関数解析

キーワード：漸近的表現論　自由確率論　ヤング図形　対称群　スケール極限　ランダムウォーク　分岐グラフ

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）漸近的表現論 (asymptotic representation theory) とは、群や環の表現にまつわる諸々の量の漸近挙動を探究する数学である。１９７０年代に起こったこのような問題意識の宣言の中心にいたのは、A.ヴェルシクであった。精緻な組合せ論的考察と極限移行を見据えた解析的技法のブレンドによる理論の草創期から、一貫して確率論の考え方が底流にあった。本研究の背景には、群の表現の（制限と誘導の）分岐則の統計的なふるまいを理解したいという研究代表者の長いスパンのテーマがある。いろいろな意味でランダムウォークは確率論の核心であり、表現の分岐則というきわめて良質の枝分れ（ランダムウォーク）がもたらす確率的な構造は、深く豊かであると確信する。

（２）研究代表者は、これまで確率論と解析的な群の表現論を意識的に一体化させながら研究を行ってきた。近年の科学では、おそらくネットワーク科学の急速な発展とも相まって、数学分野にかかわらず、大規模構造を扱うという共通項がしばしば見られる。また、統計的な思考の有用性がとみに増している。統計学はもちろん、確率論も数学の一分野であるというよりも、もはや数学全体に広く浸透した基本的な思考形態であるととらえる方がよいかもしれない。研究代表者は十数年前から、表現の分岐則という豊かな背景をもった枝分れ構造がうみだすランダムな数学的現象に興味を持ち続けている。本研究は、このような研究代表者の長年の問題意識に基づくものである。実際の研究では、確率モデルの解析と群の表現論をつなぐ橋をより多くより広くすることを心がけている。

２．研究の目的

（１）本研究の目的は、漸近的表現論の深化をはかり、確率モデルの時空に関するスケール極限との融合的な研究を展開することである。昔からよく知られているように、確率論はフーリエ解析と相性が良い。独立な小さいゆらぎの重ね合せの解析に分布の特性関数を活用するのが、その１つの典型である。本研究においても、確率モデルの特性量の計算のため、非可換なフーリエ変換の漸近挙動、すなわち漸近的表現論が応用される。これを仮に研究の順方向と呼ぶとすれば、本研究でそれに劣らず重要なのは、その逆方向である。つまり、巨大な群の表現の特質をつかむために、確率論の枠組と洗練された極限定理を利用する。ただし、この順と逆の言い回しは便宜的なものであって、あくまでも表裏一体をなしている。この認識が、本研究課題の「融合的な」という文言の意味するところである。

（２）多数の効果を寄せ集めた大規模な構造を扱う確率論の極限定理においては、どのようなスケールで物事を観察しているかの認識が重要である。群の表現論ではあまり明示的には意識されないかもしれないが、表現の漸近挙動を問題にする際には、そのような視点が有用である。本研究では、次の３種類の異なるスケール下での問題に取り組む。

①　制限誘導連鎖から生じるヤング図形の極限形状の時間発展。制限誘導連鎖の遷移における待ち時間の分布を大幅に一般化し、マルコフ性をもたないような連続時刻のランダムウォークにまでモデルの考察範囲を広げる。

②　帰納極限群の分岐グラフ（特にヤンググラフとその仲間たち）のマルチン境界が姿をあらわすようなスケール極限。無限対称群で言えば、局所的にヤング図形の行や列の長さの比率が浮かび上がってくるスケールであり、全体のヤング図形の形状はもはやとらえられない。具体的な分岐グラフのマルチン境界と帰納極限群の指標の計算を積み重ねることによって、確率論と無限次元調和解析の橋渡しを目指す。

③　極限形状のまわりのゆらぎの考察。極限形状の問題では多様な形の出現に見られる個性に関心があるのに対し、ゆらぎの研究では普遍性が大きなテーマになる。

３．研究の方法

「２．研究目的」で漸近的表現論にまつわる３とおりのスケール極限の研究について述べた。それぞれのテーマにつき、研究の方法を記述する。

（１）群の既約表現の制限と誘導は、既約表現（の同値類）間の自然なマルコフ連鎖（制限誘導連鎖）を引き起こす。対称群の場合、既約表現の同値類をヤング図形によってラベルづけをすると、このマルコフ連鎖における状態の遷移は、ヤング図形の角の箱の移動を伴う。この確率的な漸近挙動を考えることは、もはや普通の群論にはないタイプの問題である。本研究では特に、遷

移の待ち時間分布というモデルの微視的な特性がヤング図形の極限形状の時間発展という巨視的なふるまいにどのように反映されるかを調べる。とりわけ、待ち時間分布の裾が長い場合に生じると予想される特徴をつかむ。巨視的な極限形状の時間発展は、マルコフ変換と呼ばれる非線形な積分変換によってケロフ推移測度のことばに言い換えることにより、自由畳み込みや自由圧縮という自由確率論の概念を用いて記述することができる。この手法を系統的に活用する。

（２）帰納極限群の分岐グラフには、いくつかの興味深い進化の方向がある。そのうち本研究では、平井武との一連の共同研究の中で扱ってきた射影表現への拡張を考える。具体的な群の系列での射影表現の分岐グラフの詳細な解析と、分岐グラフのマルチン境界や調和関数の計算を行って、手持ちのコレクションを充実させる。

（３）研究代表者がこれまで行ってきたヤング図形のゆらぎの研究は、対称群上のフーリエ解析、置換の組合せ論、量子確率論の応用といった技法によるものである。本研究では、このスケールの現象の解明に資するため、対称群におけるケロフ多項式をはじめとして、表現の特性量と自由確率論の構造との連関を特に調べる。

４．研究成果

（１）漸近的表現論と確率モデルのスケール極限について、双方向性を意識した融合的な研究を展開することが、本研究の基本的な枠組である。無限対称群や無限ユニタリ群をはじめとする帰納極限群のような巨大でワイルドな代数的構造の上の調和解析の理論を構築するには、このような視点が有効であるという認識に基づいた構想である。以下に記述する面において、本研究の目的は一定程度達せられたであろう。

（２）増大する群の帰納的な列に対し、既約表現の制限と誘導の既約分解（分岐則）を考えることによって、群の双対的な対象（既約表現の同値類全体）の上に自然なマルコフ連鎖が現れる。このマルコフ連鎖（制限誘導連鎖）の漸近挙動は、分岐則が織りなす確率的な現象をよく反映する。本研究の主要な題材である対称群の場合、ヤング図形の形状の変化という新たな観点も加わることが興味深い。制限誘導連鎖に遷移の待ち時間を考慮すれば、連続時刻のランダムウォークが生じる。それの時空に関する適切なスケール極限をとれば、本研究で扱うようなヤング図形の極限形状の時間発展という動的なモデルが得られる。このモデルは過去数年間に研究代表者が取り扱ってきたものであるが、本研究の一番の特色は、マルコフ性を仮定することなく、多様な待ち時間分布のもとでスケール極限の計算を遂行したことである。具体的には、次のような成果を挙げることができる。
①もともとのマルコフ性をもつモデル（指数分布にしたがう待ち時間）では、ヤング図形の極限形状の時間発展をケロフ推移測度の自由圧縮や自由たたみこみによって記述する公式が、研究代表者によって得られていた（A. Hora: Publ. RIMS Kyoto Univ. 51 (2015)）。待ち時間分布を変化させることによってこの結果がどの程度安定であるかを知るのは重要である。本研究では、遷移の待ち時間分布がどのような特性をもてばこの性質がみたされるかについて、フーリエ変換のことばを用いて相当程度の特徴づけを行った。この結果は、具体的なモデルの構成に有用である。
②①とはまったく異なる状況として、時空のスケールが拡散的でなく、待ち時間分布の裾が重い場合を考察した。結果として、ヤング図形のマクロな極限形状が形成されず、平均的な量の時間発展をとりだすことができるようなある種の特異な現象を示すモデルを構築した。これは、個別具体的な例として興味深いものであるが、一般論まで深めるには、さらなる研究が必要であると思われる。

（３）巨大な群上の調和解析を展開する実りある場として、帰納極限群は重要な位置を占める。主として無限対称群についての E.トーマ、A.ヴェルシク、S.ケロフ、G.オルシャンスキーおよび平井武たちの結果を踏まえ、研究代表者は過去十数年間にわたって、帰納極限群の調和解析に関する平井武・平井悦子との共同研究を行ってきた。研究代表者はとりわけ、帰納極限群の双対的な対象である分岐グラフ上の調和関数や分岐グラフのマルチン境界の視点から、研究の進展に寄与してきた。本研究が関わるのは、平井武が提唱するスピン表現の研究の重要性に立脚したものであり、複素鏡映群とその帰納極限の指標の詳細な解析を目指している。また、指標とマルチン境界上の測度の関係にはボホナーの定理としての切り口がある。

（４）対称群とユニタリ群に関するシューア・ワイル双対性、および対称群の既約指標とシューア関数の漸近挙動は、漸近的表現論の興味深い研究対象である。当初の研究目的としては想定していなかったものであるが、シューア・ワイル双対性や超幾何関数に関わる情報理論におけるある種のモデルについての共同研究（林正人、柳田伸太郎）も行った。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Hora Akihito	４．巻 25
２．論文標題 Effect of microscopic pausing time distributions on the dynamical limit shapes for random Young diagrams	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Electronic Journal of Probability	６．最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-EJP466	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hirai Takeshi、Hora Akihito	４．巻 62
２．論文標題 Projective representations and spin characters of complex reflection groups G(m,p,n) and G(m,p,∞), III	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 1-94
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2021-0019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 洞　彰人
２．発表標題 対称群の表現に関連する確率モデルーヤング図形集団におけるプロファイルの時間発展
３．学会等名 大阪大学理学研究科談話会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 洞　彰人
２．発表標題 ボホナーの定理について
３．学会等名 吉澤尚明先生を偲ぶ数学研究会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Akihito Hora
２．発表標題 Dynamical limit shape problem for random Young diagrams
３．学会等名 Workshop on Non-commutative Probability and Related Fields（招待講演）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関