

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03533

研究課題名(和文) モジュレーション空間とHRT予想の研究

研究課題名(英文) Modulation spaces and HRT conjecture

研究代表者

小林 政晴 (Kobayashi, Masaharu)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：30516480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：今回の研究を通じて、調和解析や偏微分方程式の研究において重要な役割を果たす関数空間(ある性質を持つ関数の集まり)の基本性質の解明および偏微分方程式への応用を行った。主要な結果として次の成果が得られた。

- (1) 自由粒子のシュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような一般の高階の分散型方程式に対しても短時間フーリエ変換を用いて解を表すことができることがわかった。
- (2) フーリエ係数がある重み付け数列空間に属する関数空間におけるKatznelson型およびLeblanc型の作用関数の特徴づけを得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュレーション空間(やそれに関連するような関数空間)に関する研究はまだ日が浅く、「モジュレーション空間と相性のよい偏微分方程式は何か?」や「モジュレーション空間における作用関数を特徴づけられるか?」など多くの問題が存在する。今回得られた結果はこれらの問題の解決に重要な役割を果たすと考えられる。また、今回得られた成果は調和解析や偏微分方程式の研究において表される様々な関数空間や作用素の研究にも応用可能であると思われる。

研究成果の概要(英文)：Throughout this project, we have studied the basic properties of function spaces and their applications to PDEs. Especially, we obtain the followings:(1) Using the short-time Fourier transform, we proposed a new representation of the solution of higher-order dispersive equations (including free Schrodinger equation and Airy equation) (2) We obtained Katznelson-type and Leblanc-type theorem concerning the characterization of operating functions in the function space consisting of functions whose Fourier coefficients belong to the weighted sequence space.

研究分野：調和解析

キーワード：モジュレーション空間 短時間フーリエ変換 分散型方程式 フーリエ級数 作用関数

## 1. 研究開始当初の背景

ホログラフィーの研究でノーベル物理学賞を受賞した D. Gabor 氏が 1946 年に発表した論文 ``Gabor, D. (1946) Theory of Communication. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 93, 429-441.`` の中で用いた「Gauss 関数の平行移動と変調により生成される関数系を用いて、Fourier 級数展開のように関数を展開する」というアイデアに起源をもち、これまで互いに影響し合いながら発展してきた研究テーマである「modulation 空間(すなわち、1980 年頃にオーストリアの H. G. Feichtinger 氏により導入された関数空間の一つであり、短時間 Fourier 変換がある種の可積分性と減衰度をもつようなユークリッド空間上の関数の集まり)」と「HRT 予想(すなわち、Heil-Ramanathan-Topiwala らが論文 ``Heil-Ramanathan-Topiw, Linear independence of time-frequency translates, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 9, 2787-2795`` の中で提案した Gabor 系の  $L^2$  空間における線形独立性に関する予想)」を調和解析及び実解析的手法を用いてさらに発展させるための本研究を開始した。

## 2. 研究の目的

- (1) Modulation 空間の偏微分方程式への応用：Modulation 空間とその類似物である Wiener amalgam 空間は近年多くの研究者に注目されている関数空間である。しかし、これらの関数空間に関する研究はまだ日が浅く、重要にも関わらず、未解決な問題が多く存在する。研究代表者は加藤圭一教授(東京理科大学)、伊藤真吾教授(北里大学)との共同研究において Grochenig 氏や Wang 氏のグループが 2006 年に得たシュレディンガー方程式の解の modulation 空間評価式 (J. Funct. Anal. 233 (2006), no. 1, 1-39 および J. Funct. Anal. 246 (2007), no. 2, 366-384)の精密化や彼らの方法では得られない新たな評価式を確立した。成功の鍵は「短時間 Fourier 変換を用いた直接的な方法」である。本研究では、この方法が他の方程式にも応用可能か検証する
- (2) Modulation 空間と  $A(T)$  の関連性の解明：Modulation 空間と  $A(T)$  (すなわち、絶対収束する Fourier 級数を持つトーラス  $T$  上の連続関数の空間)の関連性は明らかにされていないが、深い関係があると思われる。例えば、Bhimani 氏と Ratnakumar 氏 (2016) は非線形シュレディンガー方程式と非線形クライン・ゴルドン方程式の研究において、 $A(T)$  を特徴づける重要な定理の一つとして知られる定理の類似の定理が modulation 空間においても成り立つことを示した。本研究では modulation 空間と  $A(T)$  の関連性を明らかにする。

## 3. 研究の方法

- (1) Modulation 空間の枠組みでシュレディンガー方程式を研究する場合に重要な役割を果たす加藤-小林-伊藤 (Tohoku Math. J (2012), J. Funct. Anal. (2014), RIMS Kokyuroku Bessatsu (2016))の方法(時間変数だけでなく、時間変数を考慮した短時間 Fourier 変換を用いる方法)だけでなく、これを更に発展させた Fourier 変換と Fourier 変換を同時に行う方法も用いる。
- (2) Kahane (J. Math. Pures Appl. (9)35, 249-259 (1956))、Katznelson (Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 76, 83-123 (1959))、Bhimani-Ratnakumar (J. Funct. Anal. 270, 621-648 (2016))、Reich-Sickel (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 177, pp. 103-149. Springer, Cham (2016))、Bhimani (Nagoya Math. J. 240, 257-274 (2020))および加藤-杉本-富田 (J. Funct. Anal. 278, 108447, 26 pp. (2020))を検討し、佐藤圓治名誉教授(山形大学)との共同研究(小林-佐藤, Nagoya Math. J. 230, 72-82 (2018))で得られた知識やテクニックと融合させる。

## 4. 研究成果

- (1) 「短時間フーリエ変換を用いてエアリー方程式の解を表すことができること」および「この解の表示が(非斉次型モジュレーション空間の場合だけでなく)斉次型モジュレーション空間におけるエアリー方程式の解の評価式に適用できること」は既に分かっていたが(加藤-小林-伊藤-高橋)、エアリー方程式の場合だけでなく、より一般の(自由粒子のシュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような)高階の分散型方程式の解に対しても応用可能であることが分かった(加藤教授、伊藤教授、高橋氏との共同研究)。その応用として、modulation 空間における高階分散型方程式の解の評価式や Strichartz 型評価式が容易に得られることが分かった。(Representation of higher-order dispersive operators via

short-time Fourier transform and its application, Keiichi Kato, Masaharu Kobayashi, Shingo Ito, Tadashi Takahashi, Tohoku Mathematical Journal 73(1) 105-118 2021年3月に掲載)

- (2) トーラス上の関数でその Fourier 係数が重み付き数列空間  $l^q$  に属するような関数の集まりにおける作用関数の特徴づけについて研究を行った。ここで「作用関数の特徴づけ」とは何かを大雑把に述べると「ある種の滑らかさを持つ関数の集まりをその性質を変えることなく、再びある種の滑らかさを持つ関数の集まりに移すような作用関数(関数または変換)は何か?」というように「ある性質を持つ関数の集まり(関数空間とよばれる)をその性質を変えることなく保つような作用関数を決める問題」である。これらの研究は偏微分方程式における解の性質を調べる上でも重要な問題であり、古くから研究されている。今回の研究では、Fourier 係数がある重み付き数列空間に属する関数空間における Katznelson 型および Leblanc 型の作用関数の特徴づけに関する定理を得ることが出来た。また、定理の応用として、Fourier-Lebesgue 空間における作用の特徴づけを得ることも出来た(佐藤氏との共同研究)(Operating Functions on  $A^q_s(T)$ , Masaharu Kobayashi, Enji Sato, Journal of Fourier Analysis and Applications 28(3) 2022年6月に掲載)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Keiichi Kato, Masaharu Kobayashi, Shingo Ito, Tadashi Takahashi	4. 巻 73 (1)
2. 論文標題 Representation of higher-order dispersive operators via short-time Fourier transform and its application	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J. (2)	6. 最初と最後の頁 105-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20191226	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Kobayashi, Enji Sato	4. 巻 28
2. 論文標題 Operating functions on $A^q_s(T)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00041-022-09925-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 M. Kobayashi
2. 発表標題 Representation of higher-order dispersive operators via short-time Fourier transform and its application
3. 学会等名 Function Spaces and Geometric Analysis and Their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Kobayashi
2. 発表標題 Operating functions on $A^q_s(T)$
3. 学会等名 12th International ISAAC Congress (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Kobayashi
2. 発表標題 Operating functions on $A^q_s(T)$
3. 学会等名 13th International ISAAC Congress, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------