

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03534

研究課題名（和文）量子スピン系における基底状態にスペクトルギャップを持つハミルトニアン分類

研究課題名（英文）Study on gapped ground states in quantum spin systems

研究代表者

緒方 芳子 (Ogata, Yoshiko)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80507955

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：量子多体系の時間発展はハミルトニアンと呼ばれる演算子で与えられる。ハミルトニアンのうちスペクトルギャップがあるもの、の分類問題が本研究のテーマである。分類の基準は、二つの、ギャップを持ったハミルトニアンは、ギャップを閉じずに滑らかに移り合う時、同値とする。これに対称性を入れた分類も興味を持たれている。本研究では、この対称性を入れた系の分類であるSPT相の分類問題について空間次元1、2次元での不変量を導出した。また、トポロジカル相と呼ばれる相を特徴付けるエニオンと呼ばれる励起を導出し、それが分類の普遍量であることを示した。同様の結果は多くあるが、本研究の特徴は、一般の状況を考えていることにある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

スペクトルギャップを持った量子多体系は量子計算機を実現するものとして注目されている。本研究はその基本的な性質、数学的な性質を明らかにする研究成果としての意義がある。特に、本研究の特徴として、量子多体系の第一原理、ミクロな法則から出発していること、モデル解析のみならず最終的には一般的な系での結果を出していること、数学的に厳密であること、が挙げられ、本アプローチの利点といえることができる。

研究成果の概要（英文）：Operators, called Hamiltonians give the dynamics of quantum many-body systems. The classification problem of Hamiltonians with a spectral gap is the subject of this research project. Two Hamiltonians are equivalent if we can connect them without closing the spectral gap. The version with symmetry also plays an important role. In this research project, we derived SPT-phase invariants in one and two spatial dimensions. We also derived the so-called anyon which characterizes topological phases. We consider such problems in general settings.

研究分野：量子統計力学

キーワード：量子統計力学

1. 研究開始当初の背景

近年、スペクトルギャップを持つハミルトニアン分類問題は理論的及び応用上の観点から様々な物理系において注目をあつめている。しかし研究開始当初の時点では、その多くの解析は、数学的に厳密でなかったり、あるいは厳密であっても、特殊なモデルについての解析となっていたりしていることが多かった。特に空間次元一次元では primitivity と呼ばれる比較的強い仮定を課した Matrix product state(MPS)を用いた解析が広く行われていた。二次元においても PEPS と呼ばれる MPS の二次元版に対応するモデル群について解析が行われていた。これらはテンソルネットワークと呼ばれ、扱いやすい上に興味深い結果を導き出すモデル群であるが、完全に一般的な枠組みであるかと言われるとそうではない。

2. 研究の目的

量子スピン系上の、局所的な相互作用によるハミルトニアンは、古くから研究されている数理物理学の基本的な対象である。このうち基底状態でスペクトルギャップを持つものは、物理的には正常相と見ることができ、この正常相全体が、どのように繋がっている、あるいは繋がっていないのか明らかにする、すなわち、基底状態でスペクトルギャップを持つハミルトニアンの集合の、「二つのハミルトニアンは、それらが、スペクトルギャップのあるハミルトニアン連続な路によりつなぐことができれば、同じクラスに入る」という同値関係による分類問題が本研究のテーマである。

3. 研究の方法

基底状態にスペクトルギャップを持ったハミルトニアン分類問題は非常に広範囲の数学者、物理学者によって研究されている。その中で、本研究の特徴は、統計力学の第一原理にのっとった、数学的に厳密な研究であるということである。すなわち、ミクロスコピックな量子統計力学のモデルから出発して、どのように分類がなされるかというそもそもの始まりの問題に興味がある。これは、場の理論を用いたアプローチと対をなし、我々のゴールの一つは、場の理論や圏論等を用いた議論で予想されたことがミクロなモデルから実際に出るのか否かを明らかにすることにある。(もちろん数学的な構造が異なるので、一致しない可能性は大いにある。)また、我々の研究では、多くのモデルについて解析を行いながら、最終的には一般論を構築することを目標とする。さらに、これらのこと全てを数学的、解析的に厳密に行う、という点が我々の研究を特徴付けるものと言える。こういった解析の設定、および道具として、作用素環論を用いる。

4. 研究成果

(1) Lieb-Schultz-Mattis type theorem というのは、ある種の条件のもと、「基底状態でスペクトルギャップが開いている」という状況は起こり得ない、という、本研究テーマと深く関わる定理である。これまで、連続群については Lieb-Schultz-Mattis をはじめとする数学的に厳密な結果が古くから知られていた。一方有限群については、物理の論文で、MPS による解析が知られていたが、数学的に一般の設定では知られていなかった。田崎晴明氏との共同研究で、一次元量子スピン系についてこれを行った。さらにその後の田崎氏と立川氏との共同研究で新たな手法により新しい同種の結果を得た。

(2) On-site の有限群による対称性、及び reflection 対称性について、一次元量子スピン系 SPT 相の研究を行った。SPT 相というのは、基底状態(最低固有値状態の固有ベクトル)にギャップのあるハミルトニアンのうち、(自明相とギャップを保ちながら繋がっているという意味で) short range entanglement をもち、与えられた対称性を満たすものの分類である。二つのハミルトニアンは、対称性を保ちながら移り合う同値とみなす。このような問題を考えるときに数学的に自然なアプローチは、何らかの index を定め、それが不変量であることを示す、というものだ。実際 MPS を元にした解析である index が提唱された。問題は、全ての系が MPS ではないため、これが部分的にしか定義されていない index であるということだった。全体で定義されていないため、それが不変量であるかという問題は意味をなさない。本研究ではまず一般の SPT 相について定義できる index を定め、さらにそれが実際に不変量であることを数学的に厳密に示した。解析には、松井氏により作用素環論で研究されていた split property という性質と、

量子統計力学で Hastings により導入された automorphic equivalence を用いた.

(3) (2)で用いた automorphic equivalence はもともと有限系で導入されたもので, 無限系の話にするには熱力学極限を取るという操作を行っていた. これは理論的にはあまり嬉しくない状況であったため, 直接無限系について automorphic equivalence を示すことを行った. 有限系での証明は有限次元性をあからさまに用いた無限系では通用しない証明となっていたため, 証明には根本的に新しいアイデアを用いた. その際, Lieb-Robinson bound と呼ばれる時間発展の局所性の評価を繰り返し用いた. これは Alvin Moon 氏との国際共同研究である.

(4) (2)で示したのは, 定義した index が不変量であるということであった. 完全不変量であるかは未解決である. しかし, この量は, 基底状態が「エタングルメントが小さく対称性が破れていない」という条件を保つ変換で移り合うか否か, という分類の完全不変量になっていることは示した. 具体的には, split property という性質を持たず純粋状態で, 与えられた対称性を満たすものの分類を考えた. 量子スピン系上の純粋状態の homogeneity というのは古く Powers の時代から知られているが, その後多くの技術面での進歩があり, 特にこの論文では, Kishimoto-Ozawa-Sakai による一般の設定での証明技術を利用した.

(5) 次元フェルミオン系における SPT 相の分類問題を考え, invariant を厳密に導出した. これは, 物理学者によって予想されていたものと一致している. さらに, frustration free と呼ばれる性質を持つ並進不変なハミルトニアン基底状態から MPS のフェルミオン版を導出した. これは Bourne 氏との共同研究である.

(6) 次元量子スピン系における SPT 相の分類問題について, 物理学者により予想されていた群子ホモロジーに値をとる invariant の存在を厳密に示した. 証明には, まず群作用を上半平面に制限するというところを行う. これによって, x 軸近傍にほぼ局在化した励起が見られる. この励起がある意味で次元ギャップ系のように見え, split property に相当する性質を満たすことを用いて, 不変量を導出した.

(7) 次元フェルミオン系における SPT 相の分類の不変量を導出した. これは, 場の理論で予想されているものに比べて, ある種二重化が起こっているという意味で異なっている. 場の理論では CRT-対称性と呼ばれる対称性が自動的に成り立っている一方, 我々の格子系ではそのような対称性は成り立っていない. そこで, 格子系において CRT-対称性を手で入れてみたところ, 上記二重化が解消し, 予想された値に帰着した.

(8) 次元トポロジカル相において, 物理の論文で 10 年以上前から言われていたことは, anyon という励起があり, この存在が long range entanglement を意味するというところであった. しかしながら, これに対応する一般的な数学的な結果が存在しなかった. 本研究で Algebraic quantum field theory の DHR 理論を参考に, superselection sector というものに注目し, Naaijkens 氏と共に非自明な superselection sector の存在が, long range entanglement の存在を意味することを示した.

(9) (8)の anyon についての解釈は, superselection sector が実際に anyon と思える性質を持たなければ意味がない. 本研究では, approximate Haag duality という Algebraic quantum field theory で要請されるのよりも弱い条件のもと, superselection sector が組紐 C^* 圏をなすということを示した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 9
2. 論文標題 An $H^3(G, T)$ -valued index of symmetry-protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Pi	6. 最初と最後の頁 1-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fmp.2021.17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 385
2. 論文標題 A Z_2 -index of Symmetry Protected Topological Phases with Reflection Symmetry for Quantum Spin Chains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1245 ~ 1272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-021-04057-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ogata Yoshiko, Tachikawa Yuji, Tasaki Hal	4. 巻 385
2. 論文標題 General LiebSchultzMattis Type Theorems for Quantum Spin Chains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 79 ~ 99
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-021-04116-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 63
2. 論文標題 A derivation of braided C^* -tensor categories from gapped ground states satisfying the approximate Haag duality	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 011902 ~ 011902
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0061785	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bourne Chris, Ogata Yoshiko	4. 巻 9
2. 論文標題 The classification of symmetry protected topological phases of one-dimensional fermion systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 1-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2021.19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 8
2. 論文標題 A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 39 ~ 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/btran/51	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Moon Alvin, Ogata Yoshiko	4. 巻 278
2. 論文標題 Automorphic equivalence within gapped phases in the bulk	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108422 ~ 108422
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2019.108422	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 374
2. 論文標題 A Z_2 -Index of Symmetry Protected Topological Phases with Time Reversal Symmetry for Quantum Spin Chains	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 705 ~ 734
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03521-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ogata Yoshiko, Tasaki Hal	4. 巻 372
2. 論文標題 LiebSchultzMattis Type Theorems for Quantum Spin Chains Without Continuous Symmetry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 951 ~ 962
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03343-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejima S., Ogata Y.	4. 巻 20
2. 論文標題 Perturbation Theory of KMS States	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincaré	6. 最初と最後の頁 2971 ~ 2986
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-019-00824-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ogata Yoshiko	4. 巻 395
2. 論文標題 An Invariant of Symmetry Protected Topological Phases with On-Site Finite Group Symmetry for Two-Dimensional Fermion Systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 405 ~ 457
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04438-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naaijkens Pieter, Ogata Yoshiko	4. 巻 392
2. 論文標題 The Split and Approximate Split Property in 2D Systems: Stability and Absence of Superselection Sectors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 921 ~ 950
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04356-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計18件(うち招待講演 18件/うち国際学会 14件)

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 量子スピン系におけるギャップ相の分類問題について
3. 学会等名 日本数学会 総合講演(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 量子スピン系における基底状態にギャップを持ったハミルトニアン分類問題について
3. 学会等名 談話会・数理科学講演会(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 An invariant of symmetry protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional Fermion systems
3. 学会等名 Webinar "Analysis, Quantum Fields, and Probability" (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of gapped ground state phases in quantum spin systems
3. 学会等名 Theoretical studies of topological phases of matter (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of SPT-phases
3. 学会等名 Topology and Entanglement in Many-Body Systems (Banff) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of gapped ground state phases in quantum spin systems
3. 学会等名 IHES Quantum Encounters Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of gapped ground state phases in quantum spin systems
3. 学会等名 Seminal Interactions between Mathematics and Physics. II (Rome) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin systems
3. 学会等名 International Congress in Mathematical Physics (ICMP) 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin systems
3. 学会等名 Summer School on Current Topics in Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 The classification of symmetry protected topological phases of one-dimensional fermion systems
3. 学会等名 C*-algebras, K-theories and Noncommutative Geometries of Correlated Condensed Matter Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin chains
3. 学会等名 CURRENT DEVELOPMENTS IN MATHEMATICS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin systems
3. 学会等名 IAMP ONE WORLD IAMP MATHEMATICAL PHYSICS SEMINAR (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 The classification of symmetry protected topological phases of one-dimensional quantum systems
3. 学会等名 作用素環論研究者シンポジウム 作用素環論の最近の進展 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Automorphic equivalence within gapped phases in the bulk
3. 学会等名 East Asian Core Doctoral Forum on Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin chain
3. 学会等名 NCGOA Spring Institute (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of SPT phases in quantum spin chains
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop ID 1937 Many-Body Quantum Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop ID 1944 Subfactors and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of symmetry protected topological phases in quantum spin chains
3. 学会等名 Thematic program Quantum Information. Madrid 2 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関