

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03535

研究課題名（和文）Goldberg-Milnor予想の解決に向けた μ -等角摂動の研究研究課題名（英文）Research on μ -conformal perturbations toward the solution to the Goldberg-Milnor conjecture

研究代表者

川平 友規（KAWAHIRA, Tomoki）

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：50377975

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、複数の周期点が退化した状態である放物的周期点をもつような複素力学系を「おだやかに」摂動し、力学系のカオス部分を本質的に保ったまま放物的周期点を安定な「双曲的」周期点の組へと変化させることができるか、という問題（Goldberg-Milnor予想とよばれる）に対し、「 μ -等角写像」とよばれるクラスの写像を用いたアプローチを行うものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に時間発展するシステムを「力学系」とよぶが、力学系を決定するパラメーターは多くの場合振動や摂動にさらされており、ある範囲で絶え間なく揺らぎ続けていると考えるのが自然である。一方で、そのような力学系の振る舞いが将来にわたって予測可能であるためには、力学系全体がパラメーターの変化に対して「安定」している必要がある。本研究では、パラメーターの変化に対して「不安定」なシステムにむしろ着目した。とくに、「不安定性」の要因となるものが「放物的分岐」とよばれる現象である場合に、パラメーターの変化を特定の方向に限定することで、システムの変化を最小限に抑えることができる、というタイプの成果を得た。

研究成果の概要（英文）：We investigate " μ -conformal mappings" to solve a conjecture proposed by Goldberg and Milnor. The conjecture states that for a given complex dynamic system with a parabolic periodic point (a periodic point with multiplicity), there exists a "mild" perturbation of the original dynamics. This perturbation transforms the parabolic periodic point into a pair of repelling and attracting periodic points without altering the topology of the Julia set.

研究分野：複素力学系理論

キーワード：複素力学系 放物的分岐 擬等角写像 Beltrami方程式 μ -等角写像

1. 研究開始当初の背景

複素係数の有理式が定める Riemann 球面上の有理関数 f に対し、その反復合成によって得られる力学系を f による (1次元有理) 複素力学系とよぶ。これを時間発展する動的システムとみなすとき、関数 f は点の軌道を定める、いわば「運動法則」である。では、この「運動法則」を微小変化させた場合、系全体はどの程度変化するのだろうか？これが本研究の根底にある、力学系の「安定性」の問題である。

安定性と変形可能性。与えられた力学系が構造安定であるとは、力学系を生成する有理関数の係数を任意の方向に微小変化させたとき (これを関数の摂動という)、力学系の性質が位相的に変化しないことをいう。 f に十分近い有理関数の力学系は、ある適当な同相写像のレンズを通して f の力学系を観測したものであり、「力学系の位相的変形」になっているのである。このように「力学系の安定性」と「力学系の変形可能性」は密接に関連している。とくに Mane, Sad, Sullivan らが 1980 年代初頭に構築した複素力学系の擬等角変形の理論によれば、安定性に関する諸問題は Teichmüller 理論をはじめとする複素構造の変形理論によって記述されるのである。

力学系の放物的分岐。同じく 1980 年頃、Douady と Hubbard は多項式力学系に付随する外射線とよばれる曲線族の組み合わせ論的構造に着目し、2 次多項式からなる力学系族の退化と分岐を詳細に調べた。「外射線の理論」はとくにパラメーター空間 (係数空間) の研究に有効で、いわゆる Mandelbrot 集合の境界 (境界は「構造安定でない 2 次多項式」の集合に相当する) がもつ複雑なフラクタル構造も、やはり組み合わせ論的な情報で記述できることを示した。『複素力学系の Goldberg-Milnor 予想』は以上のような背景のもとで生まれる。Goldberg と Milnor は 1993 年の論文において、Douady-Hubbard の外射線の理論を発展させるが、その際に着目したのが「周期点の退化と分岐」であった。とくに放物的周期点とよばれるタイプの周期点は、複数の周期点が退化した状態であり、 f を摂動させれば (すなわち多項式 f の係数を微小変化させれば)、退化していた周期点は複数の周期点に分岐する。力学系を同相写像で眺めてもそのような分岐は決して見えないので、放物的周期点をもつ多項式 f は多項式関数族において構造安定ではありえない。このように放物的周期点が摂動により分岐し力学系が質的に変化する現象を力学系の放物的分岐とよぶ。

GM 予想。Goldberg と Milnor は外射線の組み合わせ論的な考察から、「放物的周期点をもつ多項式 f は安定な力学系の族が別の安定な力学系の族に移行する過程で生じるものであろう」と予測し、次の予想を立てた：『放物的周期点をもつ多項式 f に対し、以下を満たす「特定方向の」摂動 g が必ず存在する： f の放物的周期点は g の安定な吸引的周期点と反発的周期点のペアに分岐するが、 g の力学系をカオス部分 (Julia 集合) に制限したものは f のその位相的変形になっている。』一般に「吸引的周期点」をもつ力学系は非自明かつ安定な複素構造の変形ができるので、このような摂動 g が存在するとき、 f はある力学系の変形族の境界に属することがわかる。さらに、放物的周期点をもつ多項式 f は「弱い意味での構造安定性」を持つことを示しており、 g の属する力学系の変形族が穏やかに退化したものと結論できる。このように、摂動の方向により放物的分岐を制御することで、パラメーター空間内で力学系の安定な変形族がどのように配置されているかについて本質的な情報を得ることができるのである。

Goldberg と Milnor は「多項式」の力学系に対してこの予想を立てたが、まったく同じ文で「有理関数」が生成する力学系についての予想を述べることもできる。本研究が解決を目指した

のは、この一般化された『Goldberg-Milnor 予想』(以下『GM 予想』)である。

2. 研究の目的

Goldberg と Milnor は多項式特有の組み合わせ論的な考察に基づいて『GM 予想』を立てたが、当時はまだ 2 次多項式族のような比較的単純な例でしか成立が確かめられておらず、根拠に乏しいものであった。しかも有理関数に対してはそのような組み合わせ論的な議論が適用できない。研究代表者は問題の解析的側面に着目し、予想の正否を退化 Beltrami 方程式と呼ばれる偏微分方程式の解の存在にまで帰着させた。本研究の目的は、力学系不変な退化 Beltrami 方程式の解法を追求し、『Goldberg-Milnor 予想』の肯定的解決を目指すことである。

Beltrami 方程式とは等角構造 (= 複素構造) の変形度をあらかじめ指定したとき、それを実現する同相写像が満たすべき方程式である。たとえば擬等角写像はその解として典型的であり、理論的にも十分に整備されているため、複素力学系の研究では欠かすことができない道具となっている。一方、退化 Beltrami 方程式とは「擬等角写像が解とならない Beltrami 方程式」のことであり、一般には解の存在すら保証されない。複素力学系への応用も数えるほどしかなく、しかも「退化の度合い」が十分に小さいものに限られていた。本研究で扱う退化 Beltrami 方程式は「退化の度合い」が格段に大きく、既存の結果では歯がたたない。その代わり、変形度が力学系不変な形で指定されているため、特殊な解法が存在すると期待される。本研究が成功を収めれば、近年やや手詰まり感のある複素力学系理論に目新しい道具を提供することになる。さらには、関連分野である擬等角写像論、Klein 群論、Teichmüller 理論への応用も期待される。

3. 研究の方法

本研究課題は、『GM 予想』の成否を「力学系不変な退化 Beltrami 方程式」を解くことに帰着させ、その肯定的解決を目指した。具体的には、『GM 予想』の解決に向けた新しいアプローチとして、(ア): 放物的周期点をもつ有理写像の力学系に対し、『GM 予想』が存在を主張するような摂動を位相力学系として実現し、(イ): それを複素力学系とみなすために必要な複素構造の変形を、退化 Beltrami 方程式を解くことで実現する、という方法をとった。Beltrami 方程式とは、ほとんどいたるところで絶対値 1 未満の値をとる複素平面上の可測関数 μ に対し、 μ が定める「複素構造の変形」を実現する同相写像が満たす方程式である。 μ は Beltrami 係数と呼ばれ、絶対値の本質的上限(すなわち、測度 0 の集合を除いた上限)が真に 1 未満のとき、Beltrami 方程式は中への向きを保つ同相写像を(適切な正規化のもとで)一意な解として持ち、いわゆる擬等角写像となる。擬等角写像の理論は 1960 年代から Ahlfors と Bers や Bojarski らによって解析的に使いやすい形に整備され、Teichmüller 理論、Klein 群論の発展に本質的な寄与をした。複素力学系理論においても、その著しい応用の数々は枚挙に暇がない。現在でも擬等角写像の理論は複素力学系研究でもっとも基本的な道具であり、その応用に特化した書籍も複数あるほどである。

一方、Beltrami 係数の本質的上限が 1 となる Beltrami 方程式を「退化」Beltrami 方程式とよぶ。たとえば単位円板から複素平面への上への滑らかな同相写像は、退化 Beltrami 方程式を満たす。単位円板と複素平面は解析的に異なる「型」(双曲型と放物型)を持つ Riemann 面だが、

退化 Beltrami 方程式の解は「型を変える」ことができ、「型を変えない」擬等角写像と比べて変形の自由度が格段に高いのが特徴である。しかし、与えられた Beltrami 係数 μ に対し、退化 Beltrami 方程式の可解性についての一般論は確立されていない。そのような困難もあり、複素力学系への応用例はまだ少ない。すなわち、退化 Beltrami 方程式の基礎理論からアプローチしていく必要があった。

4. 研究成果

・GM 予想の解決に必要な退化 Beltrami 方程式の解を構成するため、幾何学的関数論における種々の成果を統合し、解が適切な Sobolev 空間に入るための条件や、パラメータをいれて恒等写像に一樣収束できるための条件について研究を行った。また、摂動前の (Julia 集合上の) 力学系に対し、それらの条件が満たされるための十分条件を与えた。たとえば、すでに GM 予想が成立するクラスで、放物的周期点の重複度が 2 の場合がそれに該当する。また、同様の議論がある種の Klein 群に対しても成立することが確認できた。

・複素力学系やある種の Fuchs 群の擬等角変形を (数値的に Beltrami 方程式を解くことで) 可視化するプロジェクトをすすめ、これについて複素力学系の研究集会 (RIMS) や関数論シンポジウム等で講演を行った。

・退化 Beltrami 方程式の解を数値的に計算するアルゴリズムの作成を目指し、実および複素力学系理論における計算機援用証明の専門家である D.Gaidashev 氏 (Uppsala 大学) と共同研究を行った。具体的には、Gaidashev 氏らが考案した不動点定理を用いる方法を改良する研究を行った。

・Y.-C. Chen 氏 (Academia Sinica) と共同で、力学系の正則運動 (各点の動きが正則関数になっているような擬等角変形) の退化の速度評価を行い、適切な経路を通して力学系が放物的周期点をもつように退化させるとき、力学系が片側ヘルダー連続に退化するようにできることを示した。また、そのヘルダー指数は放物的周期点の重複度だけに依存することを示した。この成果についても、国内外の研究集会で講演を行った。また、関連論文を執筆し、雑誌に受理された。

・稲生啓行氏 (京都大学) と共同で、Mandelbrot 集合の反正則力学系における対応物であるトライコーンについて、到達可能性に関する研究を行い、論文を執筆・雑誌投稿した。

・以前、木坂正史氏 (京都大学) と共同で、Mandelbrot 集合の境界に、「ほとんどすべての形の」Julia 集合のコピーが、「ほとんど等角な擬等角写像による埋め込み」として、稠密に存在していることを証明したが、その中核的手法にはバリエーションがあり、そのバリエーションに基づいた証明を論文にまとめ雑誌へ投稿した。

・J.Lee 氏 (東京工業大学) と共同で、非アルキメデスの力学系の Julia 集合が弱い拡大性 (より正確には、ある種の非収縮性) をもつとき、Julia 集合の各点ごとの軌道を安定に摂動できることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-----------------|
| 1. 著者名 Tomoki Kawahira | 4. 巻 10 |
| 2. 論文標題 Zalcman functions and similarity between the Mandelbrot set, Julia sets, and the tricorn | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Anal. Math. Phys | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13324-020-00357-4 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Chen Yi-Chiuan, Kawahira Tomoki | 4. 巻 377 |
| 2. 論文標題 From hyperbolic to parabolic parameters along internal rays | 5. 発行年 2024年 |
| 3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 4541-4583 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/9080 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 11件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 川平友規 |
| 2. 発表標題 Visualization of quasiconformal deformations of holomorphic dynamics |
| 3. 学会等名 RIMS 共同研究「複素力学系と関連分野」(招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 川平友規 |
| 2. 発表標題 J-stability in complex and non-Archimedean dynamics |
| 3. 学会等名 2022 NCTS Japan-Taiwan Joint Workshop on Dynamical Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---------------------------------|
| 1. 発表者名 川平友規 |
| 2. 発表標題 正則力学系の擬等角変形の可視化について |
| 3. 学会等名 第64回函数論シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 川平友規 |
| 2. 発表標題 Derivatives of mildly degenerating holomorphic motions of the quadratic Julia sets |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系の諸相」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Visualizing quasiconformal deformations of the dynamics: a worked out example |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系理論の総合的研究」(国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 The Riemann Hypothesis and Holomorphic Index in Complex Dynamics |
| 3. 学会等名 TMS meeting at Taichung (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 The Beltrami equations and its application to complex dynamics |
| 3. 学会等名 The 6th Uppsala University -- Tokyo Tech Joint Symposium (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Derivatives of mildly degenerating holomorphic motions of the quadratic Julia sets |
| 3. 学会等名 NCTS Workshop on Dynamical Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets, and more |
| 3. 学会等名 Around the Mandelbrot set: A conference celebrating the 60th birthday of Mitsuhiro Shishikura (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Zalcman functions for holomorphic diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 Atelier franco-japonais de dynamiques reelles et complexes (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Derivatives of mildly degenerating holomorphic motions of the quadratic Julia sets |
| 3. 学会等名 Workshop on Holomorphic Dynamics MLC and tools for studying it (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Tomoki Kawahira |
| 2. 発表標題 Visualization of quasiconformal deformations of holomorphic dynamics |
| 3. 学会等名 Holomorphic Day (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| 個人ホームページ http://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira |
|---|

| | | |
|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織 | | |
| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

| | |
|--------------------------------------|--------------------|
| 国際研究集会 RIMS共同研究(公開型)「複素力学系と関連分野」 | 開催年 2022年～2022年 |
| 国際研究集会 RIMS共同研究(公開型)「複素力学系の総合的研究」 | 開催年 2020年～2020年 |

| | |
|--|--------------------|
| 国際研究集会 RIMS共同研究（公開型）「複素力学系の諸相」 | 開催年 2021年～2021年 |
| 国際研究集会 RIMS共同研究（公開型）「Around the Mandelbrot set: A conference celebrating the 60th birthday of Mitsuhiro Shishikura」 | 開催年 2023年～2023年 |

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|----------|--------------------|--|--|--|
| スウェーデン | Uppsala University | | | |
| その他の国・地域 | Academia Sinica | | | |