

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2019～2022
課題番号：19K03538
研究課題名(和文) Sparse domination を中心とした実解析学

研究課題名(英文) Real analysis via sparse domination

研究代表者

筒井 容平 (Tsutsui, Yohei)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40722773

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた3つの結果について概説する。1つ目は、時間積分と half wave operator によって定めるある作用素の sparse domination である。この作用素は、maximal Riesz means よりも優位的なものである。2つ目は、median 全体の集合の rearrangement を用いた特徴付けと rearrangement や median を積分平均の代わりに用いた分数冪積分作用素の有界性である。3つ目は、外力月の非圧縮 Navier-Stokes 方程式の滑らかな大きな初期値に対する解の局所存在である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2つ目の結果の median 全体の特徴付けは、median と rearrangement の関連を明確にできた点は基本的なよい考察であったと考えられる。Median を用いた作用素の有界性については、今後の Sobolev の不等式に関する研究の出発点となるものである。最後の Navier-Stokes の局所解の存在については、近年の流体の方程式の解の非存在や非一意性の研究と対をなすものとなっている。

研究成果の概要(英文)：I explain three results which had been gotten during this project. First, I gave a sparse domination for an integral operator involving the half wave operator. The operator dominates the maximal Riesz operator. The second result is a characterization of the set of medians in terms of rearrangements, and boundedness of fractional maximal operator defined by medians or rearrangements. The last one is a local existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes equation with external force and smooth but large initial data.

研究分野：実解析学, 偏微分方程式

キーワード：Sparse domination median rearrangement Navier-Stokes 方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Sparse domination について:

特異積分作用素の重み付き不等式の研究の中で生み出された sparse domination という各点評価が近年注目を集めていた。当初は、特異積分作用素や square function などに応用されていたが、徐々にその対象が違った特異性を持つ Bochner-Riesz 作用素にも及んで、sparse domination の有用性を明らかにしてきた。しかし端点評価には十分に対応できていなかった。例えば、Calderón-Vaillancourt による $S^0_{\{0,0\}}$ class の擬微分作用素の L^2 有界性は、sparse domination ではいまだ再現できないと思われる。さらには、Hardy 空間での有界性もいまだ確立されていないであろう。Sparse domination の成立は同時に Muckenhoupt の意味での weight 付きの有界性も導くため、そのような weight が適さない作用素については相性が悪い。例えば、spherical maximal operator などがそうである。Muckenhoupt とは違う weight が付随するような sparse domination も今後研究が進むのではないかと予想している。

Median について:

必ずしも局所可積分ではない関数については、当然、その積分平均は使い勝手が悪い。そこで、積分平均の代替物として、median (中央値) という概念がある。これは、古くは F. John の等周不等式の研究で初めて導入されたようだが、あまり注目を集めていなかったと思う。また、通常の sharp maximal operator の類似物として Stromberg や Lerner らにより local sharp maximal operator が導入され、詳細な解析が行われている。この研究は、上述の sparse domination の研究において、小さくはない役割を果たしている。Median は一般に一意に決まるものではない。他の概念との比較などもあまりなされていなかったように思う。しかし、積分平均の代替物という性格から既存の概念の拡張が期待できる。

流体の方程式について:

全空間での非圧縮 Navier-Stokes 方程式は広く研究されている。基本的な結果として、Kato, Giga-Miyakawa による、 $L^n(\mathbb{R}^n)$ で小さい初期値に対する大域解の存在がある。この結果の後に、同様の結果が異なる函数空間で与えられた。大域解の存在するような初期値の空間としては、Koch-Tataru による BMO^{-1} と Kozono-Yamazaki の Besov-Morrey 空間が広く知られている。この小ささの条件を外した場合は、局所解の存在でさえいえていなかったと思われる。小ささの代わりに何か条件を付けることにより局所解の存在を初期値が $L^n(\mathbb{R}^n)$ に属する場合に確立することは基本的な問題であったと思われる。また、下で述べるような非一意性の研究が大きな盛り上がりを見せていた。Euler 方程式については、kinetic energy の保存に関する Onsager's conjecture の解決もあった。

2. 研究の目的

Sparse domination について:

Bochner-Riesz 作用素などの sparse domination の研究が近年進んでいることもあり Keakeya 予想に関連する作用素の解析に sparse domination の手法を取り入れることが目的であった。その1つの理由は、それらの作用素の L^p 有界性は、 p に上下からの制限が付くからである。このような制限下で有界性が成り立つ作用素に対しては、sparse domination は有効に働くことが知られている。また、上述の端点評価の改善と H^1 への対応が期待されているため、それも目的としていた。具体的には、上で述べたような Calderón-Vaillancourt の定理を再現できるような sparse domination の開発と、 H^1-L^1 評価などへの対応である。

Median について:

Median 全体の集合の特徴付けと、積分平均を median を置き換えることによって生じる差を明らかにすることであった。前者の解決は、median の位置づけをはっきりとさせ応用のしやすさを生み出すと予想される。後者については、積分平均と median でそれぞれ定義される極大函数を考察すると、容易に $L^1 - L^{\{1, \infty\}}$ と $L^{\{1, \infty\}} - L^{\{1, \infty\}}$ の差があることがわかる。同様に、それぞれで 分数冪積分作用素を定義し、それら有界性をしらべることを目的とした。さらには、それらに対応する Sobolev の不等式を書き直し、積分平均と median の生み出す差を明確にすることが目的とした。

流体の方程式について:

阪大基礎工の岡部孝宏氏との共同研究として、 \mathbb{R}^n 上で Navier-Stokes 方程式を考える。初期値の L^n norm が大きい場合に大域解で構成できれば、いわゆる ミレニアム問題が肯定的に解決できることになる。なにも仮定しないままでは難しいため、初期値にある種の滑らかさを仮定した場合を考える。さらには、問題をより一般に考えるために外力項付で方程式を考える。

3. 研究の方法

Sparse domination について:

Bochner-Riesz 作用素の sparse domination については, Sogge による 2 次元での maximal Riesz 作用素の解析をもとに進めていた. Spherical measure の Fourier 変換は, 振動項と $S^{-(n-1)/2}_{1,0}$ の symbol との積で表現されるがそれを多分に用いた. また, 作用素の主要な部分は half wave operator を含んでいるため, 周波数が「1」付近で 2 進分解し詳細に解析を行った.

Medina について:

Median については, あまり多くはない median を扱った文献から, rearrangement との関連があることが認められたため, その方面から考察を進めた. よく用いられる右連続な rearrangement だけでなく, 左連続な rearrangement を用いることにより議論が進展した. これらの関係から, median の扱いがしやすくなり, Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式は大きな困難なく得ることができた.

流体の方程式について:

Navier-Stokes 方程式については, 初期値の $L^n(\mathbb{R}^n)$ norm は大きい場合は, 従来の縮小写像の議論が当てはまらなかった. そこで, 初期値にある滑らかさを課すことを考えた. これにより「初期値と線形解」との差が小さくなるため, この差を初期値とみなすような縮小写像の原理を用いて大きな初期値に対する局所解が得られた. また外力にも相応の連続性を課した. 熱核の重み付き評価などを多分に用いた.

4. 研究成果

Sparse domination については, Riesz 作用素に対して, Littlewood-Paley 分解などのいくつかの考察の後に現れる, half wave を含む(時間)積分作用素の sparse domination を試み, 期待されるような評価は得られた. しかし, 最終目標であった, maximal Riesz operator の sparse domination にまでは至らなかった.

Median については, その定義には一意性はなかった. その一意性の特徴付けができないかということは median に初めて出会った時にもった問題であったが, それは上述の右連続な rearrangement と左連続な rearrangement を端点を持つような閉区間として, median 全体の集合は表現できることが分かった. つまり, この 2 つの rearrangement が一致する場合のみ, median は一意に決まることが分かった. このような研究で得られた考察を用いて, median に対する Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を与えられた. 本来は, そこから Sobolev の不等式への書き換えまで行いたかったが, それには至らなかった.

非圧縮 Navier-Stokes 方程式に関しては, 実解析学の手法を用いて外力がある場合の可解性について研究を進めていた. 上述のように滑らかさを課した大きな初期値に対して, 局所一意解の構成に成功した. 我々の結果は, D. Albritton, E. Brué and M. Colombo 達による弱解の非一意性の結果と対比することがわかっている. 具体的には, 我々の結果では外力に初期時刻において強連続性を課しているが Albritton-Brué-Colombo らはそのような連続性を課していない. この連続性を弱めた場合, 同様に局所一意解を構成ができるかは興味深い問題と考えている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Jayson Cunanan, Takahiro Okabe and Yohei Tsutsui,	4. 巻 -129
2. 論文標題 Asymptotic stability of stationary Navier-Stokes flow in Besov spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 29-50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/ASY-211720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Okabe and Yohei Tsutsui	4. 巻 383
2. 論文標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in the weak L_n space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 1353-1390
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02236-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yohei Tsutsui	4. 巻 74
2. 論文標題 Sparse bounds for local smoothing operators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu B74: Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 127 - 137
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 11件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Yohei Tsutsui
2. 発表標題 Fractional medians and its maximal function
3. 学会等名 The 13th International ISAAC Congress（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yohei Tsutsui
2. 発表標題 Fractional medians and its maximal function
3. 学会等名 The 8th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Median の成す集合について
3. 学会等名 第37回 調和解析セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 A sparse form bound for an operator with wave propagator
3. 学会等名 NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 A sparse bound for a time-integral operator with wave propagator,
3. 学会等名 九州函数方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 A sparse bound for an time integral operator with wave propagator,
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 実函数論分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohei Tsutsui
2. 発表標題 A sparse bound for an integral operator with wave propagator
3. 学会等名 Special session on " Function Spaces and their Applications to Nonlinear Evolutional Equations", 12th ISAAC (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohei Tsutsui
2. 発表標題 A sparse bound for a time-integral operator with the half-wave propagator
3. 学会等名 International Conference on Function Spaces and Geometric Analysis and Their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Medians, rearrangements and their maximal functions,
3. 学会等名 大阪大学数 学教室微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Medians, rearrangements and their maximal functions,
3. 学会等名 南大阪応用 数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yohei Tsutsui
2. 発表標題 Rearrangements, medians and their maximal functions,
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) Workshop on Non-compact Variational Problems and Related Topics, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Rearrangements, medians and their maximal functions,
3. 学会等名 第82 回東 工大数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Convergence to the initial data and weighted estimates for the in- compressible Navier-Stokes equations,
3. 学会等名 日本数学会2023 年度年会函数方程式論 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Median の成す集合について,
3. 学会等名 第37 回調和解析セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 筒井容平
2. 発表標題 Rearrangements, medians and their maximal functions,
3. 学会等名 2022 年度 秋季総合分科会実関数論分科会.
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関