

令和 4 年 5 月 27 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03542

研究課題名（和文）作用素論に基づいた量子情報理論における幾何学的構造の解明とその応用

研究課題名（英文）Geometric structure in quantum information theory based on Operator Theory and its applications

研究代表者

瀬尾 祐貴（SEO, YUKI）

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：90439290

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、ヒルベルト空間上の作用素論、特にMond-Pecaricの手法による作用素不等式に関する研究の成果を基に、情報幾何学や量子情報理論の様々な幾何学的様相に絡んだ定量的な評価を中心に考察した。特に、Umegaki相対エントロピーやFK相対エントロピーに関連した正次数のTsallis型相対エントロピーをつなぐpathを構成し、実次数として統合的に扱うことができることを示し、さらに、非可換性の故の困難さは、スペクトルによる定数を用いた評価でその差異の上限を与えた。また、多変数幾何平均の情報幾何学への応用のために、基本的な不等式として、Ando-Hiai型不等式を再構成し、諸性質を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正定値行列の非可換性の故に、量子情報理論の理論的な枠組みの構成は困難を極めている。今回、ヒルベルト空間上の作用素論での様々な成果、特にMond-Pecaricの手法による作用素の諸性質の定量化が、量子情報理論に新たな視点、見方を与えることを示した。この研究が出发点となり、情報幾何学を含めた量子情報理論が次の新しい段階に進むことを可能にしている。これらのことが、数学の基礎理論としての作用素論の重要性を、その非可換構造としての作用素Jensen不等式や多変数版幾何平均の諸性質の解明を通して、明らかにできたことの意義は大きい。これらの成果はWebページを通じて海外の多くの研究者が閲覧している。

研究成果の概要（英文）：This study is based on the results of research on operator theory on Hilbert spaces, especially on operator inequalities by Mond-Pecaric's method. We focuses on quantitative evaluation involving various geometric aspects of information geometry and quantum information theory, and we study the paths of Tsallis relative entoropy of real order, which is related to Umegaki relative entropy and FK relative entropy. The difficulty due to non-commutativity was solved by using the constant by spectral evaluation. Furthermore, in the framework of matrix theory, we reformulated the Ando-Hiai type inequality as a basic inequality for the application of multivariate geometric averages to information geometry, and discussed its various properties.

研究分野：解析学基礎 / 作用素論

キーワード：情報幾何学 作用素論 エントロピー 行列幾何平均 作用素不等式 多変数幾何平均

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景：申請者は、これまで研究してきた作用素平均・作用素不等式の基礎的な結果を、2012年に、

M.Fujii, J.Mičić Hot, J.Pečarić and Y.Seo, Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012

にまとめ、MondとPečarićが共同で開発していたJensenの不等式の逆関係不等式をより一般的な枠組みで捉えることにより、その方法をMond-Pečarićの手法として確立し、ヒルベルト空間上の作用素そのものの不等式や作用素ノルム不等式などをもう一段階、上の視点から考察を行い、様々な結果を統合、整理した。そのような流れの中で、近年、工学、情報幾何学、量子情報理論などの分野の作用素論的な枠組みの構築の密接な関連の必要性が喫緊の課題として上がってきている。しかし、情報幾何学や量子情報理論におけるさまざまな幾何学的内容は、ヒルベルト空間上の線形作用素の枠組みの中では、必ずしも具体的に明らかになっていない。また、行列や作用素の文脈での様々なエントロピーやダイバージェンスなどの評価を中心とした研究も進んでいるとは言えない。そこで、申請者は、その課題を克服するために2016-2018年度の基盤研究(C)の研究において、多変数作用素幾何平均を非正則な行列や作用素に拡張し、それにより、負べきに対するTsallis相対作用素エントロピーの性質を明らかにした。さらに、作用素論における成果を深めることで、情報幾何学や量子情報理論における幾何学的な構造に関する研究を深めることができると考える。

2. 研究の目的: ヒルベルト空間上の作用素不等式や行列解析で研究してきた手法をもとにして、情報幾何学や量子情報理論などの分野のさまざまな幾何学的様相に絡んだ定量的な評価、例えば、Rényiエントロピー、Tsallisエントロピーやその相対エントロピー、相対作用素エントロピー、ダイバージェンス、測地線などを中心に考察し、作用素論的な枠組みの構築と、それらの分野との関連を明らかにし、応用を広げることが本研究の目的である。具体的な研究項目は、  
(1) 作用素論に基づく情報幾何学や量子情報理論における幾何学的構造の解明とその関連性  
(2) 多変数作用素幾何平均の情報幾何学や量子情報理論への応用  
であり、情報幾何学や量子情報理論への大きな影響や新しい視点を与えるものである。

3. 研究の方法：研究目的のところで述べたように、作用素不等式におけるこれまでの成果を踏まえ、その応用として、幾何学的な考察に基づいて、情報幾何学や量子情報理論との関連性やその応用、多変数幾何平均の理論とのかかわりを通して、作用素論的な視点から情報幾何学の幾何学的な構造の解明を目指す。そのために、初年度は、精力的に作用素論と情報幾何学との関連を研究されている藤井淳一氏と、共同研究をさらに進め、この課題に精力的に取り組む。藤井淳一氏は、これまでの科研(基盤研究(C)(一般))での研究成果をもとに、作用素論と情報幾何学との基本的な道具立てを揃えることに成功している。申請者は、ヒルベルト空間上の有界線形作用素及び行列に関する作用素(行列)不等式とその応用に関する研究を進めてきたが、今回、申請者の作用素不等式の視点をもとに、情報幾何学、量子情報理論、信号解析理論の基礎研究に、さらにもう一步踏み込んで、それらの幾何学的構造を明らかにし、その応用や従来の概念との関連性を見出ししていきたいと考えている。申請者は、多変数作用素幾何平均を作用素不等式の視点で、その非可換性やそれらの作用素論的な性質を明確にした。その結果を、他分野、特に情報幾何学や量子情報理論および信号解析理論とのかかわりにおいて発揮したいと考えている。また、申請者の研究の中心分野は、研究のスタートから、「作用素平均」特に、藤井淳一氏らが提唱した相対作用素エントロピーの一般化である作用素平均とかかわり、作用素不等式の視点からの考察も行った。さらに、正定値行列全体が作るRiemann多様体上の測地線の幾何学的な性質も、作用素不等式の視点での考察の応用の深さを示すことができたと考えている。現在は、その端緒に着いたばかりで、理論構成も十分なものになっているとは言えない。研究目的のところで、指摘した対応表に基づき、新しい視点でこの最新の分野に、応用できることを目指している。具体的には以下のことを明らかにする。初年度は、研究分担者である藤井淳一氏との研究集会の開催を通じた研究交流や資料収集を中心として、作用素論的な視点で、情報幾何学や量子情報理論の枠組みを明確化するための土台作りとし、これまでの作用素論が築いてきた基礎理論との十分な連携を新しい視点で構築する。次年度以降は、測地線の幾何学的考察の作用素不等式の観点から、情報幾何学や量子情報理論を、行列・作用素の枠組みで新たに捉え直し、その定量的な評価を中心に考察を行う。さらに、国内外の研究者との交流を通じて、新しい視点や観点をもち、私たち自身の知見を伝えたいと考えている。

4. 研究成果：本研究は、ヒルベルト空間上の作用素論、特に、凸関数に対するMond-Pečarićの手法による作用素・行列不等式、ノルム不等式及びトレース不等式に関する研究の成果を基に、情報幾何学や量子情報理論などの様々な幾何学的様相に絡んだ定量的な評価を中心に考察をした。雑誌等に掲載された、当該研究課題に密接に関係する論文の内容の概略は、下記のとおりである。

#### ( 1 ) 実次数の Tsallis 相対エントロピーに関する行列トレースノルムについて

量子情報理論において、Tsallis 型相対エントロピーはいくつか提案され、多くの応用が示されている。次数 0 の場合が、Umegaki 相対エントロピーや FK 相対エントロピーに対応し、Tsallis 型相対エントロピーはそれらの 1 径数拡張になっている。Hiai-Petz は初期の段階で、Umegaki 相対エントロピーと FK 相対エントロピーをつなぐ連続な path の構成に成功していた。次に、柳-栗山-古市により、正次数における Tsallis 型相対エントロピーをつなぐ path を構成したが、それは、次数 0 の場合を含んでいなかった。今回は、負次数の Tsallis 型相対エントロピーの path を構成したが、今回、正次数の場合の Tsallis 型相対エントロピーをつなぐ path を構成できた。それには、作用素論における Furuta 不等式がその評価において大きな寄与を果たした。これにより、実次数で統一的な見方が可能になった。さらに、1 径数拡張の関係式は限定的には知られているが、その差異がどのくらいあるのか、また、それ以外では、どのような関係が成り立っているのかについては、あまり議論されていなかった。それは作用素や行列の非可換性が大きな障害になり、うまく諸性質を解明できなかった点にある。今回、Mond-Pecaric の手法を用いることで、対応する作用素や行列のスペクトルに關係する定数を用いて、その作用素・行列の諸性質の上限の評価を与えることに成功した。

#### ( 2 ) 多変数幾何平均に関するいろいろな性質について

多変数幾何平均の量子情報幾何学や量子情報理論への応用のための基礎研究として、多変数幾何平均に対する Ando-Hiai 型不等式の拡張やその補完不等式、多変数幾何平均の正規行列式の乗法性に関する評価式、多変数幾何平均のミンコフスキー型不等式などを Lawson-Lim-Palfia による  $n$  変数作用素べき平均及び Karcher 幾何平均の枠組みで研究・考察した。これらの一般的な作用素環上での議論はこれからの課題である。

#### ( 3 ) 行列幾何平均を用いたコーシー・シュワルツ不等式やヘルダーマッカーシー型不等式について

正定値行列全体のなす多様体上で、積構造を行列幾何平均で考察することで、これまでに知られている結果の拡張を考察した。特に、非可換の場合の積構造に関して行列幾何平均は作用素論における従来からの多くの結果の利用も可能で、これからさらなる応用・発展が見込まれる。

#### ( 4 ) Renyi 型ダイバージェンスに関する研究

研究の最終年度において、正定値行列全体のなす微分可能な多様体上の 2 点の分離度を測る指標として、Renyi 型ダイバージェンスはさまざまに提案されているが、今回、行列幾何平均から構成される量子 Renyi 型ダイバージェンスの諸性質について、考察をし、単調性や CPTP に関する DataProcessingInequality などを示すことができた。また、この多様体に関する基礎的な成果も今回まとめることができた。

#### ( 5 ) 今後の展開

上記 ( 1 ) ~ ( 4 ) において、考察・研究した結果は、まだまだ端緒に着いたばかりで、量子情報理論における正定値行列全体のなす微分可能な多様体の幾何学的な解析に大いにつながると考えている。この解析を作用素論の枠組みを用いて解明することが本研究の動機であったが、今回の結果は、その方向付けが正しかったことへの証左であったと確信している。さらに、作用素論的な考察が、古典的な結果を量子化する場合に、この非可換的な状況が量子化に対する研究の困難性を与える場合に、とても有効であるということ、他分野での考察を深めることで示していきたい。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計18件（うち査読付論文 18件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fumio Hiai, Yuki Seo and Shuhei Wada	4. 巻 31
2. 論文標題 Ando-Hiai-type inequalities for operator means and operator perspectives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X2050007X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ryosuke Nakayama, Yuki Seo and Reo Tojo	4. 巻 5
2. 論文標題 Matrix Holder-McCarthy inequality via matrix geometric means	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Operator Theory	6. 最初と最後の頁 744-767
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43036-020-00044-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ryosuke Nakayama, Yuki Seo and Reo Toji	4. 巻 14
2. 論文標題 Matrix Ostrowski inequality via the matrix geometric mean	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Inequalities	6. 最初と最後の頁 1375-1382
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/jmi-2020-14-89	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 藤井淳一	4. 巻 69
2. 論文標題 圏論的「核」の解釈を巡って	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 大阪教育大学紀要	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32287/TD000371771	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 藤井淳一	4. 巻 49
2. 論文標題 n進小数と符号と極限	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数学教育研究	6. 最初と最後の頁 131-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 藤井淳一	4. 巻 49
2. 論文標題 Fibonacci anyon におけるTQC 再説補足	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数学教育研究	6. 最初と最後の頁 139-154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Jun-Ichi Fujii	4. 巻 5
2. 論文標題 Means for fixed rank PSD matrices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Operator Theory	6. 最初と最後の頁 816-838
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43036-020-00063-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mohsen Kian, Mohammad Sal Moslehian and Yuki Seo	4. 巻 -
2. 論文標題 Variants of Ando-Hiai type inequalities for deformed means and applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/s0017089520000403	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masatoshi Fujii and Yuki Seo	4. 巻 498
2. 論文標題 Matrix trace inequalities related to the Tsallis relative entropies of real order	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2020.124877	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fumio Hiai, Yuki Seo and Shuhei Wada	4. 巻 67
2. 論文標題 Ando-Hiai type inequalities for multivariate operator means	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 2253-2281
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03081087.2018.1488938	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masayuki Fujimoto and Yuki Seo	4. 巻 561
2. 論文標題 The Schwarz inequality via operator-valued inner product and the geometric operator mean	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 141-160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.09.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Seo	4. 巻 472
2. 論文標題 Matrix trace inequalities on Tsallis relative entropy of negative order	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1499-1508
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.12.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Seo	4. 巻 13
2. 論文標題 Numerical radius inequalities related to the geometric means of negative power	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Operators and Matrices	6. 最初と最後の頁 489-493
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/oam-2019-13-37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jun Ichi Fujii	4. 巻 82
2. 論文標題 MOORE-PENROSE INVERSE AND OPERATOR MEAN	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Scientiae Mathematicae Japonicae	6. 最初と最後の頁 125-129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32219/isms.82.2_125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jun Ichi Fujii and Takeaki Yamazaki	4. 巻 32
2. 論文標題 Power monotonicity for a path of operator means	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Scientiae Mathematicae Japonicae	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 藤井淳一	4. 巻 68
2. 論文標題 KitaevのToric codeについて	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 大阪教育大学紀要、人文社会科学・自然科学	6. 最初と最後の頁 81-90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 藤井淳一	4. 巻 48
2. 論文標題 プログラミング的思考と関数教育	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数学教育研究	6. 最初と最後の頁 21-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jun Ichi Fujii and Yuki Seo	4. 巻 67
2. 論文標題 The unique solution of the Karcher equation and the self-adjointness of the Karcher mean	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 976-986
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03081087.2018.1440520	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 多変数行列幾何平均に対するノルム不等式
3. 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会 (函数解析学分科会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuki Seo
2. 発表標題 Ando-Hiai type inequalities for deformed means
3. 学会等名 Operator Theory 2020 Virtual Workshop Seoul/Tokyo, December 19, 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 Deformed means に対するAndo-Hiai 型不等式
3. 学会等名 日本数学会 2021年度春季総合分科会(函数解析学学科会)慶應義塾大学矢上キャンパス
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤井淳一
2. 発表標題 測地線に基づく同ランク正半定値行列の平均
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会(新潟大)(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuki Seo
2. 発表標題 Numerical radius inequalities related to the geometric means of negative power
3. 学会等名 The fifteenth workshop on numerical ranges and numerical radii(WONRA)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 Lawson-Lim-Palfialによる作用素冪平均の評価
3. 学会等名 日本数学会 2019年度秋季総合分科会(函数解析学学科会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 On the deformed means from n-variable operator mean by operator means
3. 学会等名 RIMS共同研究「順序を用いた作用素の構造研究と関連する話題」京都大学数理解析研究所（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 負冪の幾何平均に関する数域半径不等式
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「関数空間論とその周辺」京都大学数理解析研究所（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀬尾祐貴
2. 発表標題 Norm inequalities for deformed operator means
3. 学会等名 日本数学会 2020年度春季総合分科会（函数解析学分科会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤井淳一
2. 発表標題 同ランク半正定値行列の平均について
3. 学会等名 RIMS共同研究「順序を用いた作用素の構造研究と関連する話題」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤井淳一
2. 発表標題 同ランク正半定値の行列平均について
3. 学会等名 日本数学会春季総会 関数解析分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	藤井 淳一  (Fujii Jun Ichi)  (60135770)	大阪教育大学・教育学部・教授    (14403)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------