

令和 6 年 6 月 2 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03544

研究課題名（和文）有理曲面を用いたK3曲面上の力学系の解析

研究課題名（英文）Research on dynamical systems of K3 surfaces in terms of rational surfaces

研究代表者

上原 崇人（Uehara, Takato）

岡山大学・環境生命自然科学学域・准教授

研究者番号：40613261

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、2次元のコンパクト複素多様体上の自己双有理写像による力学系の解析である。ここでは、2次元複素多様体の特別なクラスである、有理曲面とK3曲面に焦点をあてて研究を行った。まず、有理曲面上の双有理写像による力学系に対して定義される力学系的次数と呼ばれる量全体のなす集合の構造を具体的に決定した。また、以前構築したK3曲面の張り合わせ構成の中に、18次元の射影的K3曲面族が存在することを示すことで、力学系を解析するための相空間の研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有理曲面においてはどのくらい豊富に双有理写像による力学系が存在するか知られていなかったが、本研究成果により、力学系的次数を介して豊富に力学系が存在することが示された。また、K3曲面においてはトレリの定理を用いて力学系の存在については調べられているが、周期写像の記述が難しいため、力学系の具体的な記述が一般には困難である。そのため、K3曲面の張り合わせ構成の研究は、力学系の具体的な研究の可能性を示唆しており、重要であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to study dynamical systems given by bimeromorphic self-maps on two dimensional compact complex manifolds. Here we focus on two classes of two dimensional complex manifolds: rational surfaces and K3 surfaces. We determine the structure of the set of dynamical degrees of birational maps on rational surfaces. We also show the existence of 18-dimensional family of projective K3 surfaces among the family given by the gluing construction.

研究分野：複素力学系

キーワード：力学系 有理曲面 K3曲面 エントロピー 力学系的次数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年、コンパクト複素多様体上の自己双有理写像による複素力学系が活発に研究されている。当該研究は、複素・代数幾何における結果を解析的な力学系理論へ応用するため、融合分野に位置し、広範囲に影響を与えることが期待される。しかし、2次元多様体である複素曲面上においても、双有理写像による力学系理論は未だ確立されていない。例えば、力学系が豊富に存在する曲面である、有理曲面とK3曲面については、現状次の通りである。

(1) 有理曲面は複素曲面の中で最も基本的な曲面であるとともに、力学系も全て代数的であるため、重要な力学系の例を提示してくれる曲面であると想定される。さらに、研究代表者は最近、有理曲面上に双正則自己同型写像が豊富に存在することをエントロピー値を介して示している。具体的には、実現しうる任意のエントロピー値に対して、この値を実現する有理曲面上の双正則自己同型写像による力学系が存在することを示した。しかし、双有理写像に関しては、どのくらい力学系が豊富に存在するのか知られていない状況である。

(2) K3曲面はコンパクト複素曲面の特別なクラスであり、K3曲面全体は局所的に20次元の複素多様体でパラメータ表示されることが知られている。一方、K3曲面の族の具体的な構成例として、4次元の族やクマー曲面の族等が存在するが、知られている具体的な族はいずれも19次元以下になってしまう。さらに、K3曲面はいわゆるトレリの定理により、K3曲面の同型類が周期写像によって決定されるため、周期写像が重要な意味をもつことになる。しかしながら、周期写像が計算可能なK3曲面の例はほとんど知られていない。

このような状況の中、研究代表者は最近、小池貴之氏との共同研究により、周期写像が計算可能な広いクラスのK3曲面族を具体的に構成することに成功した。具体的には、複素射影平面上での楕円曲線内の9点ブローアップで得られる2つの有理曲面を貼り合わせることでK3曲面が構成されることを示した。特筆すべき点は、本構成方法によるK3曲面族の周期写像が計算可能であること、そして当該K3曲面族がK3曲面全体の中で超越的な曲面を含み、さらに19次元の曲面の族を含む広いクラスを占めることである。本研究結果は、与えられたK3格子上の写像に対して、有理曲面を用いてK3曲面上の力学系が具体的に記述される可能性があることを示唆している。

2. 研究の目的

上述の通り、有理曲面上の双有理写像による力学系がどのくらい豊富にあるか未知の状況であった。そこで本研究の目的の一つは、エントロピー値及びこれに付随する力学系の次数を介して、双有理写像による力学系が豊富にあることを示すとともに、これらの値を用いて力学系を具体的に解析していくことである。

また、先述のK3曲面の構成は、具体的記述の可能な有理曲面を用いて、一般には具体的記述の困難な超越的K3曲面の記述を可能にした。そこで本研究のもう一つの目的は、当該K3曲面の族を用いて、K3曲面上の写像を具体的に記述し力学系の研究に対する基盤を固めること、そして具体的に記述した写像を用いてK3曲面上の力学系の一般理論を構築することである。

本研究は、K3曲面上の写像を具体的に構成することで複素力学系分野における研究対象を提供し、力学系理論を構築することで分野の発展に貢献するものである。さらに本研究は、複数分野の融合領域に位置し、数論や代数幾何学等の他分野の結果を用いて複素力学系理論を構築する稀な研究であるため、広範囲に影響を与えるものと期待される。

3. 研究の方法

まずは、具体例を用いた実験が何より重要である。そのため、研究費で購入したパソコンおよび計算ソフトを用いて具体例を用いて数値実験を行うことで、一般論構築への糸口を探った。また、京都大学における力学系セミナーや毎年開催される力学系研究集会を中心に様々なセミナーや研究集会に参加、講演することで情報収集を行い、最新の手法による解析を行なった。

4. 研究成果

(1) 有理曲面上の双正則自己同型写像による力学系に対するエントロピー値の結果を、双有理写像に拡張した。具体的には、あるワイル群の任意の元に対応するスペクトル半径の対数は、適当な有理曲面上の双有理写像のエントロピーとして実現されることを示した。本結果は、豊富に存在することが知られている値に対してそれをエントロピー値として実現する力学系が存在すること、つまり、力学系が豊富に存在することを述べており、今後の研究に大きな影響を与えるものと期待している。

(2) 上述のK3曲面の張り合わせ構成は、いわゆるK3曲面のII型退化の近傍を記述した曲面となっている。ここでは、K3曲面のIII型退化の近傍に対応する構成として、2次元射影空間の6点ブローアップで記述される4つの3次元曲面を用意して、無限遠3直線の近傍をのりしろとし

て貼り合わされる曲面について、コホモロジー群がどのようにして得られるかを検証した。この計算は、K3 曲面構成へ重要なステップであると考えている。

(3) 有理曲面上の双有理写像が反標準曲線を保つ場合、写像に対してディターミナントが定義されるが、このディターミナントの絶対値が 1 ではない双有理写像に対するジュリア集合について調べた。具体的には、有理曲面上で自然に定義される面積形式に関してジュリア集合は面積ゼロとなることを示した。特に、写像に対して最大の測度論的エントロピーを実現する不変測度が定義されるが、この不変測度が自然な面積形式に関して特異となることになる。当該結果は、以前に双正則写像に対して示した結果を双有理写像に対して拡張したものであるが、双有理写像には不確定点が存在するため、不確定点の挙動をいかに制御するかが難しい点であり議論の要となる。

(4) 上記構成による K3 曲面は、19 次元の族をなし、族における一般的な曲面は非射影的となることも示している。ここで問題となるのは、この構成による K3 曲面族の中に射影的な曲面は含まれているか否かである。この問題に関して、小池貴之氏との共同研究により次の結果をえた。すなわち、上記構成による K3 曲面族の中に、18 次元の射影的な K3 曲面の族が存在することを示した。この結果は、上記構成が射影的曲面と非射影的曲面を共に含む幅広いクラスの K3 曲面を実現することを示しており、与えられた周期に対応する K3 曲面の具体的な実現や、K3 曲面上の力学系の具体的な構成及びその解析など、今後の発展に大きく寄与することを期待している。本結果は、2 つの有理曲面の直線束が貼り合わせ可能となる構成方法に制限して、この直線束の上に貼り合わせ可能で正のチャーン曲率をもつエルミート計量を構成することで示される。

(5) 有理曲面における双有理写像による力学系の力学系的次数を介した研究に関して研究成果をあげた。力学系的次数は力学系の複雑さを表す量であるが、この力学系的次数全体の構造は、Thurston により示された 3 次元双曲多様体の体積全体の構造と同じであること、つまり、同じ順序数の型であることを示した。また、3 次元双曲多様体における体積の集積点は尖点をもつコンパクトではない双曲多様体に対応しているが、有理曲面上の力学系における力学系的次数の集積点は非自明な不確定点集合を許容する双正則ではない双有理写像に対応していることを示し、各力学系的次数をもつ適当なクラスの元は共役類を除いて有限であることを示すことに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Uehara Takato	4. 巻 34
2. 論文標題 Siegel disks on rational surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni	6. 最初と最後の頁 235 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/rlm/1005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Koike Takayuki, Uehara Takato	4. 巻 Volume 6
2. 論文標題 A gluing construction of projective K3 surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.46298/epiga.2022.volume6.8504	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Uehara Takato	4. 巻 224
2. 論文標題 Automorphism groups of rational surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 411 ~ 422
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.05.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 9件/うち国際学会 7件）

1. 発表者名 上原崇人
2. 発表標題 On dynamical degrees of birational mappings
3. 学会等名 東京大学複素解析幾何セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 On dynamical degrees of birational mappings
3. 学会等名 French-Japanese Workshop of Real and Complex Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 上原 崇人
2. 発表標題 射影面上の双有理写像による力学系スペクトルについて
3. 学会等名 京都力学系セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 Dynamical spectrum on projective surfaces
3. 学会等名 Workshop on Dynamics in Arithmetic and Complex Geometry and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 上原 崇人
2. 発表標題 Dynamical degrees of birational mappings on projective surfaces
3. 学会等名 晴ればれ岡山代数幾何 学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 上原崇人
2. 発表標題 On the dynamical spectrum on projective surfaces
3. 学会等名 佐賀大学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 上原崇人
2. 発表標題 On a gluing construction of K3 surfaces
3. 学会等名 2022年度城崎代数幾何学シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 On dynamical degrees of birational mappings
3. 学会等名 RIMS Workshop Complex Dynamics and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 A gluing construction of projective K3 surfaces
3. 学会等名 Aspects of Complex Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 On maximal entropy measures for birational maps on compact complex surfaces
3. 学会等名 Complex Dynamics and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 Siegel disks for rational surface automorphisms with positive entropy
3. 学会等名 Geometric Complex Analysis on Foliations and Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 A gluing construction of K3 surfaces
3. 学会等名 Differential Systems: from theory to computer mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 Dynamical degrees of birational maps on complex surfaces
3. 学会等名 Bifurcation and stability in complex dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------