

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03545

研究課題名(和文)ディラック作用素のレゾナンス分布

研究課題名(英文)A distribution of resonances of Dirac operators

研究代表者

伊藤 宏 (ITO, Hiroshi)

愛媛大学・理工学研究科(工学系)・教授

研究者番号：90243005

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：遠方で発散するポテンシャルをもつディラック作用素のレゾナンス非存在領域を見出した。次にシュレーディンガー作用素のレゾルベントの解析を行った。次の内容である。エネルギーに依存する複素電場ポテンシャルおよび磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式を考える。これは、摩擦項を含む波動方程式の定常問題の方程式と考えることもできる。ポテンシャルには適当な滑らかさおよび遠方での減衰を仮定すると、散乱振幅が定義される。散乱振幅に関して次の結果が得られた。

- (1) 散乱振幅の高エネルギーでの挙動から電場および磁場を再構成できる。
- (2) 散乱振幅の高エネルギーでの漸近展開を得ることができる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ディラック方程式、シュレーディンガー方程式や波動方程式は各々量子力学および波動現象において重要な方程式であり、物理学や工学においても多くの研究がされている。ディラック作用素のレゾナンスの解析は、ディラック作用素の構造とも関係し、その作用素の研究の発展につながる。シュレーディンガー方程式や波動方程式の散乱振幅からもとのポテンシャルを再構成する逆散乱問題の研究は、散乱振幅がどのような情報を含んでいるかという学術的に興味深い内容であるのみならず、工学における非破壊検査などとも関係し、応用上重要である。

研究成果の概要(英文)：We have found resonance-free regions for Dirac operators with diverging potentials. We next analyze resolvents of Schrodinger operators. Indeed, we considered Schrodinger equations with an energy dependent electric potential and a magnetic potential. The electric potential is assumed to be complex-valued potential. Then this equation can be considered as a stationary equation for a wave equation with a damped term. We suppose some regularity and some decay condition at infinity on the potentials. Then the scattering amplitude is well-defined. Our results for the scattering amplitude are as follows:

- (1) We can reconstruct the electric potential and the magnetic field from the asymptotic behavior of the scattering amplitude at the high-energy region.
- (2) We can obtain an asymptotic expansion of the scattering amplitude in terms of energy parameter at the high-energy region.

研究分野：数理物理学

キーワード：シュレーディンガー作用素 ディラック作用素 スペクトル 散乱理論 レゾナンス

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ディラック作用素は、相対論的量子力学における重要なハミルトニアンであり、多くの研究が物理学や数学の分野でなされてきた。非相対論的量子力学で中心的な役割を果たすシュレーディンガー作用素と類似点も多い。実際、遠方で減衰するポテンシャルをもつ場合には、単独の微分作用素であるシュレーディンガー作用素での詳しい解析手法をもとに、様々な工夫をもって、連立の微分作用素であるディラック作用素の解析が行われてきた。ところが、遠方で発散するポテンシャルをもつ場合には、両者の間に大きな違いがある。シュレーディンガー作用素では、そのスペクトルは離散固有値のみからなるのに対して、ディラック作用素の場合には、実数全体を絶対連続スペクトルで覆ってしまう。研究代表者（伊藤宏）は、共同研究者である山田修宣と科学研究費（基盤研究（C）21540187（H21～H23）、24540176（H241～26））において、2つの相対論的シュレーディンガー作用素を介在させることで、そのスペクトル構造を明らかにした。また、光速を無限大にする極限（非相対論的極限）において、ディラック作用素のレゾナンスは、2つの相対論的シュレーディンガー作用素のレゾナンスに収束することを示した（レゾナンスは、もとのハミルトニアンを複素化して得られる非自己共役作用素の固有値で定義される）。これまでの研究では、非相対論的極限が主であり、磁場を入れることができなかった。基盤研究（C）15K04959（H27～29）では、磁場ポテンシャルを入れること、光速を固定した場合のレゾナンスについて詳しく解析すること、を目的として、研究を進めた。解析の途中に現れる相対論的パウリ作用素についてはそのスペクトル構造やレゾナンス、非相対論的極限について詳しく調べ、結果を得ることができた。この結果をディラック作用素に適用するために、磁場ポテンシャルをもつ複素化されたディラック作用素に Foldy-Wouthuysen-Tani 変換を拡張して、解析を進めていた。

2. 研究の目的

この研究の当初の目標は、

- (1) 遠方で発散する電場ポテンシャルと有界な磁場ポテンシャルをもつディラック作用素のレゾナンスの複素平面における分布を決定すること

であった。この研究を進めていくうえで、非自己共役作用素のレゾルベントの評価、特に、高エネルギーでの評価が必要になったが、この研究はそのままでは難しいため、遠方で減衰する複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素のレゾルベントの解析から始め、そこで開発した手法を持って、もとの問題に取り組むことにした。そこで、次の問題を考えることにした。

- (2) 遠方で減衰するエネルギーに依存する電場ポテンシャルと磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の散乱振幅を定義し、その高エネルギーでの挙動から磁場および電場ポテンシャルを再構成すること

3. 研究の方法

本来は、活発に他の研究協力者と対面で議論して研究を進めていくが、コロナ禍のために、行動制限があったため、研究代表者が主に研究を進めた。

ほぼコロナ禍以前の2019年度においては、「作用素論セミナー」（京都大学）、「解析セミナー」（愛媛大学）などの定期的なセミナーや、「夏の作用素論シンポジウム」、「RIMS 研究集会」（京都大学）、「愛媛大学スペクトル・散乱セミナー」（愛媛大学）などのシンポジウムや「日本数学会」に出席して、他の研究者との議論や情報交換を行った。コロナ禍で出張などが制限されたり、対面の研究会が開催されなかった2020年度、2021年度においては、オンラインでこれらの研究会などに参加を行った。そのために、必要なパソコンや周辺機器を購入した。また、2020年度と2021年度には、「夏の作用素論シンポジウム」の開催責任者となった。2022年度は、出張制限が緩和されたので、「日本数学会」、「RIMS 研究集会」に対面で出席し、他の研究者と情報交換や研究連絡を行った。また、「夏の作用素論シンポジウム」や「愛媛大学スペクトル・散乱セミナー」では、研究成果を発表し、意見を聞くことのできる研究者に出張してもらい、かれらのコメントをもとに改善を行った。さらに、研究代表者が事情で出席できない研究会においては、研究協力者など他の研究者に出席してもらい、研究会で得られた情報を伝えてもらった。また、必要な書籍を購入した。

4. 研究成果

(1) 主な成果

研究代表者により主な結果を述べる。

遠方で発散する電場ポテンシャルと有界な磁場ポテンシャルをもつディラック作用素を考える．ポテンシャルにはある種の解析性を仮定すると，複素平面上に複素固有値とみなせるレゾナンスが定義される．これらが，どのように分布しているのかが問題であるが，研究代表者は，レゾナンスの非存在領域を見つけることができたが (Hokkaido Mathematical Journal, 2020)，最終目標であるレゾナンスの分布については，コロナ禍による研究環境の悪化で時間が不足して結果を得ることができなかった (2022 年度で定年退職のため，研究期間の延長はできなかった)．

遠方で減衰するエネルギーに依存する複素電場ポテンシャルと磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式を考える．その一般化固有関数の無限遠での漸近挙動から散乱振幅が定義される．散乱振幅から電場ポテンシャルと磁場を決定できるかという逆散乱問題を考える．研究代表者は，研究協力者である田村英男氏のアイデアを用いて，非自己共役作用素である複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の極限吸収原理を証明し，その高エネルギーでの精密な挙動を得ることで，散乱振幅の高エネルギーでの挙動から電場ポテンシャルと磁場を再構成することに成功した．さらに，高エネルギーでの散乱振幅のエネルギーをパラメータの関数としたときの漸近展開を得た．この結果は，論文にまとめており，研究誌に投稿する予定である．

(2) 国内外における位置づけとインパクト

レゾナンスの研究は主に，遠方で減衰するシュレーディンガー作用素の場合に研究が行われてきた．そのため，散乱理論に現れる散乱行列との関係も深い．特に，プランク定数を小さくする準古典極限における解析は，古典力学との関係から活発に行われてきた．それらの研究はディラック作用素においても行われている．一方，ここで研究対象としているのは，遠方で発散するポテンシャルをもつディラック作用素であり，遠方で減衰する場合と比べ，そのスペクトル構造がまったく異なり，レゾナンスの性質も違うことが予想される．光速を無限大にする非相対論的極限においては，レゾナンスの存在は，2 種類のパウリ作用素のレゾナンスの近傍に現れる．では，光速を固定したときにはレゾナンスはどこに現れているのか？複素平面でどのような分布をしているのか？この研究の最終目標はこれに答えるものであり，ディラック作用素の理解には重要な内容であると思われる．ただ，最終目標の解決まではいたらなかったのは残念である．

シュレーディンガー作用素のポテンシャルを散乱振幅から決定する逆散乱問題は長い歴史をもつ．ポテンシャルの減衰が弱い遠距離型ポテンシャルの場合もいくつかの研究がある．一方，摩擦項をもつ波動方程式の問題では，固定されたエネルギーの場合に，指数減衰するポテンシャルの場合にのみ解決されている．この方法では，ポテンシャルの減衰度を緩くすることはできない．そのため，もっと弱い減衰をするポテンシャルの場合に散乱振幅からポテンシャルを決定できるかという問題は，未解決だと思われる．この研究では，エネルギーに依存する複素電場ポテンシャルと磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素を考え，通常シュレーディンガー方程式と摩擦項をもつ波動方程式を同時に扱うことが出来るようにした．その設定のもと，少し強い減衰条件をもつ短距離型ポテンシャル (指数減衰よりかなり弱い) の場合に，その散乱振幅の高エネルギーの挙動から電場ポテンシャルと磁場を再構成することに成功した．これにより，摩擦項をもつ波動方程式の逆散乱問題に関して，肯定的な答えが得られた．

(3) 今後の展望

現在の研究を進めていくことで，ディラック作用素のレゾナンスの分布についての結果が得られると思われる．考えているディラック作用素の構造は，2 つの相対論的パウリ作用素と密接に関連している．これらのレゾナンスとの関係を研究することで，ディラック作用素の構造が深く理解できると思われる．

エネルギーに依存する複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の逆問題に関しては，電場ポテンシャルおよび磁場ポテンシャルに関しては，通常シュレーディンガー作用素の解析手法を発展させることで，もっと減衰条件を弱めることが出来ると思われる．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 ITO Hiroshi T. | 4. 巻 49 |
| 2. 論文標題 Eigenvalues and resonances of Dirac operators with dilation analytic potentials diverging at infinity | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 247-296 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/1602036026 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Ito Hiroshi T., Yamada Osanobu | 4. 巻 33 |
| 2. 論文標題 Spectral theory of Dirac operators with potentials diverging at infinity | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Sugaku Expositions | 6. 最初と最後の頁 111 ~ 133 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/suga/450 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 伊藤 宏 |
| 2. 発表標題 An inverse problem for Schrodinger equations with energy dependent potentials |
| 3. 学会等名 愛媛大学スペクトル・散乱理論セミナー |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名 伊藤 宏 |
| 2. 発表標題 高エネルギー極限を用いた逆散乱問題について |
| 3. 学会等名 2022 年夏の作用素論シンポジウム |
| 4. 発表年 2022年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|-------------------------------|-----------------------|----|
| 研究協力者 | 田村 英男 (TAMURA Hideo) | | |
| 研究協力者 | 山田 修宣 (YAMADA Osanobu) | | |
| 研究協力者 | 岩塚 明 (IWATSUKA Akira) | | |
| 研究協力者 | 安藤 和典 (ANDO Kazunori) | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|