

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 22 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03548

研究課題名（和文）確率最適輸送問題の新展開

研究課題名（英文）New development of stochastic optimal transportation problem

研究代表者

三上 敏夫（Mikami, Toshio）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：70229657

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：シュレディンガーの問題の周辺分布に関する半凹性とリプシッツ連続性を示した。値関数が0になるマルコフ過程がエルゴード的な場合に、値関数とシュレディンガー汎関数方程式の解の時間無限大での漸近挙動を与えた。確率最適輸送問題の双対定理の証明を単純化した。コスト関数が凸ではない場合に、1次元確率最適輸送問題の解のマルコフ性を示した。コスト関数が凹関数である場合に、最適輸送問題のラグランジアン定式化を与えた。コスト関数が無限遠方で1次以上2次未満の増大度を持つ場合に、確率最適輸送問題の値関数が有限であるための必要十分条件及び、時間が0に近づいた時及び無限大になる時の値関数の漸近挙動を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シュレディンガーの問題の周辺分布に関する半凹性とリプシッツ連続性は本研究で初めて証明された。シュレディンガーの問題は、データサイエンスに応用されており、本研究のデータサイエンスへの応用が待たれる。確率最適輸送問題の双対定理の証明を通して、改めて、確率最適輸送問題が周辺分布問題に密接に関係していることを示した。凸ではないコスト関数を持つ確率最適輸送問題の解のマルコフ性の研究や最適輸送問題のラグランジアン定式化は本研究で初めて証明された。コスト関数の無限遠方での増大度の違いによって確率最適輸送問題の値関数が有限であるための条件が異なることが本研究で初めて証明された。

研究成果の概要（英文）：We proved the semi-concavity and the Lipschitz continuity, in marginal distributions, of Schroedinger's problem. When the Markov process with zero value function is ergodic, we gave the long-time asymptotics of value function and of solution of Schroedinger's functional equation.

We simplified the proof of the duality theorem for stochastic optimal transport. We proved a Markov property of a solution of a class of one-dimensional stochastic optimal transport with a non-convex cost. We gave a Lagrangian formulation of optimal transport with a concave cost. When a cost function exhibits more than or equal to linear growth and less than quadratic growth, we gave a sufficient and necessary condition for the finiteness of stochastic optimal transport. We also gave the asymptotics of value function as time goes to zero and infinity.

研究分野：確率論

キーワード：確率最適輸送問題

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 確率最適輸送問題の典型例であるシュレディンガーの問題の最小解が初期終期分布とシュレディンガー汎関数方程式の核関数の連続関数であることを示した研究代表者三上の研究がある。それにより、ある種の平均場偏微分方程式の係数の時間・空間・周辺分布に関する可測性がわかり、シュレディンガーの問題の最小解をその方程式の解により特長付けられた。もっと一般の確率最適輸送問題にこの研究を拡張しようとした。

(2) 研究代表者三上は、海外研究協力者S.J.Sheu教授との議論の中で、Knothe-Rosenblatt過程の一般化の存在と一意性の研究の糸口らしきものについて気づいた。

(3) 拡散係数が非退化で可積分、ドリフトが可積分な拡散過程の1次元周辺分布は時間についてほとんど至る所確率密度を持つ。これは、上記可積分性が2次の可積分性の場合、すべての正の時間について成り立つことが確率最適輸送問題を通してわかる。確率最適輸送問題により、これを時間について高々可算集合を除いて成り立つことを示そうとした。

(4) 最適輸送問題のアイデアを用いると、離散マルコフガウス自由場の最大値の確率分布は、離散独立ガウス自由場の最大値の確率分布とある独立同分布の確率変数列の平均値の掛け算として表されることがわかった。これを用いることで、離散マルコフガウス自由場の最大値の漸近挙動について、より良い研究結果が得られるのではないかと考えた。

2. 研究の目的

(1) 確率最適輸送問題の最適解の周辺分布に関する滑らかさの研究

(2) Knothe-Rosenblatt process の一般化の存在と一意性の研究

(3) 確率最適輸送問題による周辺分布の滑らかさの研究

(4) 確率最適輸送問題によるガウス場の最大値の分布の研究

3. 研究の方法

(1) 最新の研究情報の収集のための文献の整備

(2) 普段の研究組織内の研究打ち合わせ(email及び直接の研究打ち合わせ)

(3) 国際会議での情報収集と成果発表

(4) 国内の研究者との討論および情報交換

4. 研究成果

(1) 確率最適輸送問題の双対定理の拡張

初期終期確率分布を固定した場合と各時間での確率分布を固定した場合の連続なセミマルチンゲールに対する確率最適輸送問題を考える。我々が過去に証明していたこの問題に対する双対定理をsuperposition principleを用いて一般化した。特に、作用汎関数の下半連続性の証明に必要な仮定を取り除くことができた。また、従来独立に証明されていたFokker-Planck方程式の解に対する双対定理も同時に証明できる。

(2) シュレディンガーの問題

初期終期確率分布を固定した場合の確率最適輸送問題の典型例であるシュレディンガーの問題を考える。

値関数を、初期確率分布を確率分布に持つ確率変数の汎関数と考えたとき、連続で半凹性を持つことを証明した。

終期分布を固定した場合に、値関数は初期分布の関数としてオーダー2のWasserstein距離に

関してリブシツ連続であることを示した。

拡散係数が定数の場合に、最小解である調和経路過程のドリフトベクトルがマルチンゲールになることを示した。研究代表者三上は、2004年に、シュレディンガーの問題の最小解である調和経路過程のゼロ雑音極限が存在し、特に、ドリフトベクトルが時空間変数に関する2乗平均収束の意味で収束し、その極限が、コスト関数が2次関数の時のMongeの問題を解くことを示した。上記の研究結果により、この収束が時間に関しては広義一様収束の意味での収束に改善できることがわかった。

正再帰的で定常確率密度関数を持つ拡散過程が値関数が0となるときの最小解となる場合を考える。シュレディンガーの汎函数方程式の解が時間無限大で初期確率分布と終期確率分布の直積測度に弱収束することを示した。終期時間が無限大に発散したときに、値関数が終期分布の定常分布に対する相対エントロピーに収束することを示した。初期確率分布と終期確率分布が2次のモーメントを持ち、終期確率分布の微分エントロピーが有限な場合に、解の初期確率分布と終期確率分布の直積測度に対する相対エントロピーが時間無限大で0に収束することを示した。なお、この場合、上記のシュレディンガーの汎函数方程式の解の収束は全変動距離の意味での収束に拡張できる。これらの結果は、既知の結果の一般化になっている。

Brun-Minkowskiの不等式は、最適輸送問題の解を用いて証明することができる。類似の不等式をシュレディンガーの問題の解を用いて示した。

(3)初期終期確率分布を固定した確率最適輸送問題の有限性と漸近挙動

コスト関数がコントロールについて無限遠方で1次以上2次未満の増大度を持つ場合に、確率最適輸送問題の値関数が有限であるための必要十分条件及び、時間が0に近づいた時の確率最適輸送問題の漸近挙動を与えた。時間が無限大になる場合にはこの確率最適輸送問題は無限大に発散することと発散レートも与えた。

(4)初期終期確率分布を固定した確率最適輸送問題: コスト関数が凸でない場合

(i)凸でないコスト関数を持つ確率最適輸送問題の解のMarkov性を状態空間が1次元の場合に示した。

(ii)初期終期確率分布が固定された場合の最適輸送問題を考える。

ラグランジアンが凹関数で劣線形増大オーダーを持つ場合、値関数は、0か無限大であることを示した。

コスト関数が凹関数の持つある性質を持つ場合に、コスト関数とは異なる新しいクラスのラグランジアンを用いて、最適輸送問題のラグランジアン定式化を得た。この場合、最適経路の一意性がないことも示した。また、「最適経路は、途中でランダムに止まっても良いが、移動するときは、(ランダムな速度でも良いが)時間全体を通じて一定速度でなければならない」ことを示した。また、コスト関数が非減少な場合に、別のクラスのラグランジアンを導出することに成功した。この場合、2つのラグランジアン定式化において、最適経路の空間は一致すること及びそこではラグランジアンの値が一致することも示した。

ラグランジアンが凸関数ではないが線形増大オーダーを持つ場合、その最適輸送問題は、オーダー1のMonge-Kantorovich問題の定数倍になることも示した。特に、ラグランジアンが無限遠方のみで線形増大オーダーになる場合に限り、最適経路は存在しないことを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshio Mikami, Haruka Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 A remark on the Lagrangian formulation of optimal transport with a non-convex cost	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Pure and Applied Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Toshio Mikami	4. 巻 -
2. 論文標題 Stochastic optimal transport with at most quadratic growth cost	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Applied Math. Optim.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00245-024-10141-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jin Feng, Toshio Mikami, Johannes Zimmer	4. 巻 385
2. 論文標題 A Hamilton-Jacobi PDE associated with hydrodynamic fluctuations from a nonlinear diffusion	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1,54
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04110-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Toshio Mikami	4. 巻 73
2. 論文標題 Regularity of Schroedinger's functional equation in the weak topology and moment measures	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 99,123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/81928192	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Mikami	4. 巻 2
2. 論文標題 Stochastic optimal transport revisited	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SN Partial Differ. Equ. Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-020-00059-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Mikami	4. 巻 56
2. 論文標題 Regularity of Schroedinger's functional equation and mean field PDEs for h-path processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 831,842
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18910/73630	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Jin Feng
2. 発表標題 A multi-scale Hamilton-Jacobi theory in $P_2(\mathbb{R}^d)$, in the context of hydrodynamic limit for action minimizing dynamics
3. 学会等名 43rd Conference on Stochastic Processes and their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Stochastic optimal transport with at most quadratic growth cost
3. 学会等名 Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三上敏夫
2. 発表標題 コスト関数がノルムの高々2次の増大度をもつ場合の確率最適輸送問題について
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三上敏夫
2. 発表標題 コスト関数が高々ノルムの2乗の増大度をもつ場合の確率最適輸送問題の有限性と短・長時間漸近挙動について
3. 学会等名 The eleventh meeting on Probability and PDE
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Finiteness of stochastic optimal transport
3. 学会等名 国立台湾大学数学科談話会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Schroedinger's and Nelson's problems from the viewpoint of stochastic optimal transport: an introduction
3. 学会等名 Web seminar, Department of Mathematics, Nanjing University（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Schrödinger's and Nelson's problems, and stochastic optimal transport
3. 学会等名 Schrödinger's problem and Optimal Transport (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Regularity of Schrödinger's functional equation
3. 学会等名 New trends in Hamilton-Jacobi: PDE, Control, Dynamical Systems and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshio Mikami
2. 発表標題 Regularity of Schrödinger's functional equation
3. 学会等名 Equadiff 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Toshio Mikami	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 129
3. 書名 Stochastic Optimal Transportation: Stochastic Control with Fixed Marginals	

1. 著者名 Toshio Mikami	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 130
3. 書名 Stochastic Optimal Transportation - Stochastic Control with Fixed Marginals -	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Kansas			
ドイツ	Technical University of Munich			