

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03549

研究課題名(和文) トロイダル量子群と量子可積分系の研究

研究課題名(英文) Quantum toroidal algebras and quantum integrable systems

研究代表者

神保 道夫 (JIMBO, Michio)

立教大学・名誉教授・名誉教授

研究者番号：80109082

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：可積分系への応用を見込んだ量子トロイダル代数の研究を行い以下の成果を得た。1) gl_n 型量子トロイダル代数の臨本表現を gl_1 型部分代数の積に制限したときの分岐則を与えた。この結果はコセット型 W 代数 $W(gl_n/gl_{n-1})$ の q 変形が変形 $W(gl_{n|n-1})$ 代数であることを具体的に示している。2) gl_1 型量子トロイダル代数の余加群となる代数 K_1 を導入して古典型変形 W 代数を統一的に記述し、可換な部分代数(運動の保存量)を構成した。3) 代数 K_1 を gl_n 類似 K_n に拡張し、その可換部分代数を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

W 代数は共形場理論の数学的定式化である。量子トロイダル代数は W 代数の q 変形の研究に有力な方法を与えている。これまでの研究は概ね A 型の場合に限られていたが、本研究では量子トロイダル代数を少し拡張することによって、一般の場合の統一的扱いに一步を踏み出した。特に「localな運動の保存量」と呼ばれる可換な部分代数の構成が A 型の場合とほぼ同じ方法でできることがわかり、今後の研究への素材を提供できたと考えている。

研究成果の概要(英文)：We studied quantum toroidal algebras in view of its applications to integrable systems. We obtained the following results: 1) We determined the branching rule of Wakimoto representations of quantum toroidal gl_n to its subalgebra which is a product of gl_1 quantum toroidal algebras. This shows explicitly that the deformation of the coset W algebra of type gl_n/gl_{n-1} is given by deformed W superalgebra $W(gl_{n|n-1})$. 2) We introduced an algebra K_1 , which is a comodule over gl_1 quantum toroidal algebra, gave a uniform description of deformed W algebras of classical types, and constructed a commutative subalgebra (integrals of motion) thereof. 3) We generalized the algebra K_1 to a gl_n analog K_n , and constructed its commutative subalgebra.

研究分野：可積分系

キーワード：quantum toroidal algebra deformed W algebra integrals of motion

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子アフィン代数は単純リー代数 g をアフィン化した $g[x, 1/x]$ の量子化であるが、その2変数版は量子トロイダル代数と呼ばれる。量子トロイダル代数の表現については1990年代に Saito, Uglov らの研究があるが、量子アフィン代数に比べて数は少なく、ほぼA型の場合に限られている。

(2) 単純リー代数 g に付随する W 代数 $W(g)$ は大きな可換な部分代数を持つことが抽象的に知られており、その生成元は local な運動の保存量と呼ばれる。Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov は可積分系の手法を用いてそのスペクトルに関する一連の深い研究を行った。彼らの導入したスクリーニング作用素の多重積分からなる non-local な運動の保存量は上記 local な保存量とも可換となる。

(3) W 代数 $W(g)$ の q 変形は自由場表示により構成された ($g = \mathfrak{sl}_n$ の場合 Awata-Kubota-Otake-Shiraishi 1996, g 一般の場合 Frenkel-Reshetikhin 1997)。その後 $W(\mathfrak{sl}_n)$ の自由場表示は gl_1 型量子トロイダル代数のフォック表現の n 重テンソル積にほかならないことが認識された (Feigin-Hashizume-Hoshino-Shiraishi-Yanagida 2009)。

(4) $W(\mathfrak{sl}_n)$ については local および non-local な運動の保存量の q 変形が構成されそれらの可換性が直接計算で示されている (Feigin-Kojima-Shiraishi-Watanabe 2007)。これらはどちらも多重積分であるが、便宜上 q 変形したものを “local” “non-local” と呼ぶことにする。その後これらの可換性は量子トロイダル代数に対する (gl_m, gl_n) 双対性という形で理解された (Feigin-Jimbo-Mukhin 2019)。また gl_1 量子トロイダル代数の Q 作用素の構成、およびそれを用いた “local” な保存量のスペクトルについてベータ根による記述が得られている (Feigin-Jimbo-Mukhin 2015)。

2. 研究の目的

多くの量子可積分系は量子アフィン代数の対称性に基づいて構成され解析されている。それをさらにアフィン化して量子トロイダル代数の枠組みに拡張することは意味のある研究課題と考えている。 q 変形された運動の保存量の研究はその具体例を提供する。たとえばコセット W 代数 $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 / \mathfrak{sl}_2$ のようなごく自然な例で例外型超代数 $D(2, 1;)$ が現れることからわかるように、対象を従来研究されていた $W(\mathfrak{sl}_n)$ の場合に限定することは望ましくない。本研究はより広い W 代数に対する運動の保存量の研究を目的とする。

量子トロイダル代数の R 行列から転送行列を構成することにより、“non-local” な運動の保存量の構成は原理的には可能であるが、具体的な記述は \mathfrak{sl}_n 以外には知られていない。また変形 W 代数の中に “local” な運動の保存量を構成することも $W(\mathfrak{sl}_n)$ 以外では知られていない。具体的目標としてこれらの問題に取り組む。

3. 研究の方法

当初の目標であったスペクトルの記述の研究は難航したため、A 型以外の場合についての運動の保存量の構成に集中し、その過程で qq 指標の組合せ論の考察を実施した。

長年にわたり Mukhin, Feigin と毎年 1 ヶ月程度の集中的な共同研究を行ってきた。本研究でもその体勢を継続する予定であったが、2019-2021 年度についてはコロナ禍で Zoom による連絡を強いられ、研究実施に大きな支障を来した。2022 年度には Mukhin を 6 週間程度招聘することができ、共同研究を進めた。

4. 研究成果

本研究で得られた成果は以下のとおりである。

(1) 論文[1]において、量子トロイダル代数を用いて古典型アフィンリー代数に付随する W 代数を統一的に記述し、`local`な運動の保存量を構成した。内容を以下に述べる。

gl_1 型量子トロイダル代数をフォック表現のテンソル積上で表現するとき、 E カレントが $W(\mathfrak{sl}_n)$ の基本カレントの自由場表示を与える。(異なる種類のフォック表現を組み合わせれば W 超代数 $W(\mathfrak{sl}_{\{m\}n})$ が得られる。) 基本カレントは n 個の頂点作用素の和であり、その構造が量子アフィン代数の q 指標と類似していることは Frenkel-Reshetikhin がすでに指摘している。この類似をたどって基本カレントの隣接項の比から A カレントを定義すると、それらの contraction からアフィン型カルタン行列の q 変形とスクリーニング作用素が定まる。

非 A 型を扱うため新たに量子トロイダル gl_1 代数の余加群となる代数 K_1 を導入した。上の構成の類似により Frenkel-Reshetikhin が与えた有限型カルタン行列の q 変形が再現され、さらにアフィン型に拡張される。

$D^{(2)}_1$ 型を除く非例外型アフィンカルタン行列に対し `local`な運動の保存量が構成される。これらは K_1 代数の E カレントの多重積分の形であり、積分核は A 型の場合と同じものである。可換性は直接計算による。これらはまた (0 ノードも含めた) スクリーニング作用素とも可換になる。

(2) 論文[2]では[1]の手法を、fermionic node が 1 種類という制限のもとに、 qq 指標の組合せ論として定式化した。特に本研究の当初目標としていた $D(2,1; \quad)$ 型の qq 指標の実例をいくつか与えたが、この場合には(iii)の運動の保存量の構成は適用できず、課題として残っている。

(3) 論文[3] では K_1 代数を gl_n 型に拡張し、運動の保存量の構成を行った。 (gl_m, gl_n) 双対性は (K_n, D_m) 型の双対性に拡張できると期待している。

(4) 量子トロイダル超代数 $gl_{\{m\}n}$ の正部分の shuffle 代数による実現を用いて可換な部分代数の構成を行い、それが多項式環と同型であることを示した。

(5) $gl_{\{n,1\}}$ 型量子トロイダル超代数に頂点作用素を 2 個添加して拡大した代数の交換関係を調べた。これは $n=3$ の場合変形 Bershadsky-Polyakov 代数と呼ばれる代数の拡張である。

(4), (5) については論文を準備中である.

- [1] B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin, and I. Vilkoviskiy, Deformations of W algebras via quantum toroidal algebras, *Selecta Math.* 27 no. 52 (2021) 62 pages
- [2] B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin, Combinatorics of vertex operators and deformed W-algebra of type $D(2,1; \)$, *Adv. Math.* 403 (2022) Paper No. 108331, 54pp
- [3] B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin, Quantum toroidal comodule algebra of type $A_{\{n-1\}}$ and integrals of motion, *SIGMA* 18 (2022) 051, 31 pages

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 B. Feigin, M. Jimbo and E. Mukhin	4. 巻 403
2. 論文標題 Combinatorics of vertex operators and deformed W-algebra of type $D(2,1;)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108331
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Feigin B., Jimbo M., Mukhin E., Vilkoviskiy I.	4. 巻 27
2. 論文標題 Deformations of W algebras via quantum toroidal algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-021-00663-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 B. Feigin, M. Jimbo and E. Mukhin	4. 巻 337
2. 論文標題 Evaluation modules for quantum toroidal gl_n algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Progress in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-63849-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin	4. 巻 367
2. 論文標題 The (gl_m, gl_n) duality in the quantum toroidal setting	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commun. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 455-481
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03405-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin	4. 巻 60
2. 論文標題 Towards trigonometric deformation of sl_2 coset VOA	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 73507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5081799	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Michio Jimbo
2. 発表標題 Deforming integrals of motion via quantum toroidal algebras
3. 学会等名 Geometry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michio Jimbo
2. 発表標題 Remarks on deformed W algebras and integrals of motion
3. 学会等名 New Trends in Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov	4. 発行年 2021年
2. 出版社 AMS	5. 総ページ数 192
3. 書名 Local Operators in Quantum Integrable Models vol. I	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------