

令和 4 年 5 月 26 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03561

研究課題名(和文)非線形移流拡散方程式系の測度値解及び特異点集合の時間構造解析

研究課題名(英文)On the structure analysis of measure value solutions and singular sets for non-linear drift diffusion systems

研究代表者

杉山 由恵 (Yoshie, Sugiyama)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：60308210

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、線形拡散に留まらず非線形拡散型Keller-Segel系をも考慮し、測度値解が全ての時刻において時間を止めるごとに  $\rho$ -関数の有限和と正則部分の和で記述されることを証明した。更に以下を証明することに成功した。(1) 爆発時刻を超えて解を構成するかどうか。そのための適切な解空間は存在するか；(2) 爆発点( $\rho$ -関数の凝集の中心)の軌跡は時間関数として正則かどうか；(3) 爆発点の凝集サイズは時間関数として正則であり、かつ単調性を有するかどうか。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、爆発点の集合及び凝集サイズの時間発展を解析することで、解の有する特異構造を詳らかにしている。初期値のサイズに依存しないKeller-Segel系の解構造について、統一理論を構築したことで、特異性を有する方程式系の解析に新たな数学的枠組みを構築することが出来た。

研究成果の概要(英文)：We consider not only linear diffusion but also nonlinear diffusion Keller-Segel systems, and prove that the metric solution is described by the sum of the finite sum of the  $\rho$ -functions and the regular part at every time step. Furthermore, we succeeded in proving the following:

(1) Whether or not the solution is constructed beyond the explosion time. Whether there exists an appropriate solution space for this purpose. (2) Whether the trajectory of the explosion point (the center of the aggregation of  $\rho$ -functions) is regular as a time function. (3) Whether the size of the cohesion of the explosion point is regular and monotonic as a function of time.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：Keller-Segel系 測度値解 時間大域解 初期値問題の適切性 特異性解析

## 1. 研究開始当初の背景

物理工学における典型的な拡散現象は線形熱方程式による近似が多く用いられる。最も単純なモデルはラプラス作用素によるものであり、移流項を考慮したものとしては、フォッカー-プランク方程式が知られている。これらは、重ね合わせの原理といった物理学の基本法則を提唱するなど、よりよいモデルとして近年も盛んに研究されている。しかし、数理生物学における白血球遊走や単細胞アメーバの(化学物質の発散過程に依存する)集中現象を解析するには、次の Keller-Segel 系(以後 KS と略記、右式を参照)と呼ばれる非線形拡散方程式が有効である。KS は単細胞生物の密度の時間発展を追跡する数理生物モデルとして 70 年代に提唱された反応拡散型方程式系である。半線形型については、解の時間大域的な存在や有限時刻における爆発が知られており、流体力学における Navier-Stokes 方程式と同様に、今日数理生物学における確固としたモデルと目されている。

半線形型、退化準線形放物型である KS は、空間次元と初期データとの微妙なバランスのもとに、時間大域解と爆発解の存在が顕著に現れる非線形方程式のモデルとして 1980 年代から活発に議論されてきている。

KS は多くのパラメータを有し、その取り方によって半線形型、退化型、特異型が現れる豊富な構造を内在している。特に退化型の場合、主要項の係数に未知関数が含まれるため一様楕円性が保証されない困難を生ずる。同方程式系自身は、放物-放物型および放物-楕円型に分類されるが、ともに重要な研究対象であり、適切性を論じる際、それぞれの特性に応じた解析が求められる。KS で重要な問題は以下に分類される。

1: “時間局所解の存在・一意性” といった “適切性” の解明は、非線形偏微分方程式の研究では共通する極めて重要な問題意識である。

2: 小さい初期条件に対して “時間大域解の存在・一意性・安定性” (これらを初期値問題の “(時間大域的)適切性” という) を論じる。

3: 解が有限時刻爆発するとは、有限時間で解  $u$  の空間変数に関する最大値が無限大に発散すること、即ち、時刻  $T_*$  が存在して  $\limsup_{t \rightarrow T_*-0} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$  と定める。このような時刻  $T_*$  の存在や、 $T_*$  における解構造の解明、更に  $T_*$  を超えて方程式のもつ性質を解析しようとする数学的試みを “特異性” 解析と呼ぶ。大きい初期条件に対しては “(時間局所的)適切性” に加え、 “特異性” 解析が重要な研究課題となる。

## 2. 研究の目的

本研究では、KS の解構造を大きい初期値と小さい初期値のいずれの場合にも議論し、統一的に描出することを研究目的とする。

## 3. 研究の方法

以下で開発した手法を発展させる。

[1] S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J.J.L. Velázquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, Arch. Ration. Mech. Anal. 206, 31-80, 2012.

## 4. 研究成果

【口頭発表】研究集会 The 16th Linear and Nonlinear Waves  
M.Miura, and Y.Sugiyama, Measure Valued Solutions of 2D Keller-Segel Systems, 2018 年 10 月 30 日

【論文】2022 年 5 月現在、1 論文を投稿中である。更に、1 論文について投稿準備中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kozono, Hideo; Miura, Masanari; Sugiyama, Yoshie .	4. 巻 267
2. 論文標題 Time global existence and finite time blow-up criterion for solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 5410--5492
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 杉山由恵
2. 発表標題 On $H^{\alpha}$ order continuity of solutions to non-linear diffusion equation with derivative external forces
3. 学会等名 日本数学会 関数方程式分科会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 杉山由恵
2. 発表標題 脳動脈瘤治療過程における 血栓化ダイナミクスを説明する数理モデルの構築
3. 学会等名 第92回バイオメクフォーラム21研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 杉山由恵
2. 発表標題 脳動脈瘤治療過程における 血栓化ダイナミクスを説明する数理モデルの構築
3. 学会等名 第92回バイオメクフォーラム21研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	College of London			