

令和 4 年 6 月 7 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03569

研究課題名(和文)幾何解析と超局所解析の新展開

研究課題名(英文)New Development of Geometric and Microlocal Analysis

研究代表者

千原 浩之 (Chihara, Hiroyuki)

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：70273068

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では積分幾何学の超局所解析および幾何学的トモグラフィーについて研究した。まず、地震学に現れる平面上の双曲型ラドン変換と放物型ラドン変換の再生公式の精密化と高次元化を行った。これらの結果は既に2編の論文として出版されている。次に平面のなす空間上に複素数値相関数を持つフーリエ積分作用素を導入した。これはラドン変換の像の超局所化を与えるものである。最後に、ユークリッド空間上のd平面変換のフーリエ積分作用素としての正準関係を具体的に記述した。さらに線質硬化によるCT画像の乱れは2つの凸金属領域を包む超曲面を特異台とする conormal distribution であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

d平面変換の超局所解析の結果は従来の2次元に限られていたCTスキャナーに関連する超局所解析を現代の3次元CTスキャナーに関連する超局所解析の基盤を築くものであり、今後のさらなる様々な応用が期待される。一方、一般のアフィン・グラスマン多様体ではなく平面のなす空間に限定ではあるが、CTスキャナーで言うところの観測データに相当する超関数の超局所化の方法を構成したことになるが、超局所解析と深層学習を利用するCT関連の最先端の応用数学では観測データの超局所解析に踏み込めておらず、本研究はその意味で応用される可能性がある。

研究成果の概要(英文)：I studied microlocal analysis of integral geometry, and geometric tomography. Firstly I studied two-dimensional hyperbolic and parabolic Radon transforms arising in seismology, and obtained the refinement of the inversion formula and the generalization for higher dimensions. These results already published in two papers. Secondly I introduced a Fourier integral operator with a complex phase function on the space of hyperplanes. This might be used for the microlocalization of the images of the Radon transform corresponding the measurements of CT scanners. Thirdly I studied the microlocal analysis of the d-plane transform on the Euclidean space. More precisely I described the canonical relation of the d-plane transform as a Fourier integral operator using my original coordinatization of the affine Grassmannians. Moreover, I studied the metal streaking artifacts using the canonical relation, and proved that for any two convex metal regions, the artifact is a conormal distribution.

研究分野：解析学

キーワード：フーリエ積分作用素 超局所解析 ラドン変換 X線変換 波面集合 医用画像

1. 研究開始当初の背景

- (1) 研究開始の 2019 年度以前から外から見た情報だけで内部を見ることができることが面白く積分幾何学の超局所解析および幾何学的トモグラフィーに興味があったので、2018 年度からほとんど外国で開催される研究集会やチュートリアルコースに出席して情報収集を行っていたが、自分も新規参入して成果を挙げられるようになる可能性があるかと判断して 2019 年度から正式に自分の専門分野をこれまでの「幾何解析」から「積分幾何学の超局所解析および幾何学的トモグラフィー」に変更することにした。
- (2) この方面の研究は純粋数学に限定しても、CT スキャナーや手荷物検査などの X 線による検査機器に起源をもつ超局所解析、地震波や PET などの媒質を伝わる波を扱うことに起源をもつ超局所解析、微分幾何学に起源をもつ超局所解析など様々な話題がある。また、この方面では純粋数学と応用数学の交流が活発で深層学習などの最先端の応用数学の話題を聴講する機会が非常に多い。そのため研究開始当初は研究課題的を絞れず、ただ文献を読み外国で開催される研究集会に出席して講演を聴講していた。
- (3) これまでのほとんどすべての研究がユークリッド平面あるいは 2 次元曲面上の測地的 X 線変換等に関する研究であった。これは計算がしやすいこと、特に 2 次元特有の計算手法が確立されていること、などの理由であると思われる。現在の 3 次元 CBCT (cone beam CT) 等の理論的基盤の構築には本来は 3 次元の関連する超局所解析の理論的基盤の構築が必要である。

2. 研究の目的

- (1) トモグラフィーでは関数の特異性こそが関数の持つ情報である。そのため、トモグラフィーに関連した積分変換について高次元の場合も含めた超局所解析の基盤を構築し、超局所解析を駆使した「観測データが限定された場合の再生可能性と再生公式」や「再生画像に現れる種々の乱れの本質の解明」や「準古典解析に基づく標本化の良し悪しを評価する研究」などの応用数学にも発展する基本的な研究成果を目指している。

3. 研究の方法

- (1) 筆者は指導者や共同研究者のいない孤独な新米研究者なので、初年度の 2019 年度は研究成果を挙げることも情報収集に力を入れた。2020 年度からは COVID-19 の影響により、世界向けウェビナーが盛んになり、超局所解析のウェビナーや研究集会だけでなく、画像信号処理やデータ科学などのトモグラフィーと関係の深い応用数学のウェビナーも聴講するようになって、最先端の情報収集がやりやすくなった。
- (2) 基本的に収集した情報と自分の能力からみて取り組めそうな課題に挑戦するのが研究手法である。また技術の補足が必要なことも時々起こるので、そのような場合には慌てずにまず専門書などを利用して勉強し修得後に取り組む。
- (3) 本研究では数学以外の知識や技術の習得も必要であった。具体的には医療画像等のトモグラフィーの専門書による情報収集と MATLAB や Julia Programming Language 等のプログラミング言語の習得であり、いずれもゼロからの出発であった。幸い、もともと純粋数学の一流研究者であって医療画像分野でも一流研究者である Epstein 氏の医療画像の専門書があってそれを勉強することで研究活動には十分な情報を得ることができた。またプログラミング言語については本科研費で購入した MATLAB のインターネット上のマニュアルが充実しているのでそれを主に利用して修得を図ったが、現状では少なくともトモグラフィー関連の画像を作成して論文や講演資料で提示できるようにはなっている。

4. 研究成果

- (1) 地震学に現れる平面上の双曲型ラドン変換と放物型ラドン変換の再生公式の精密化と一般化および高次元化についての成果を得た。Moon (2016) と Ustaoglu (2017) によって困難のある部分の近傍では変換される関数は恒等的に 0 であるという強い仮定のもとで再生公式が得られていた。筆者はその条件を緩和して困難のある部分での有限次の消滅条件のもとで、従来の変換を少し一般化した場合について再生公式が得られることを証明した。さらに平面上の問題を一般次元に高次元化した場合の結果を得た。これらの結果は 2020 年と 2021 年の 2 編の論文として出版されている。高度な数学を一切使っていないが、2020 年の論文の Mathematical Reviews のレビュー記事ではその点を「当該分野である地震学関連で本論文の結果が使われる可能性がある」と評価されている。
- (2) n 次元ユークリッド空間上の関数の d 次元アフィン部分空間上の積分値を与える d 平面変換のフーリエ積分作用素としての情報の凝縮物である canonical relation を具体的に記述して超局所解析の基盤を構築した。さらに CT スキャナーで言うところの人体が

金属部分を含む場合に現れる線質硬化による CT 画像の線状の乱れはある種の超関数であることを証明した。n=2 の場合に Park-Choi-Seo (CPAM 2017) および Palacios-Uhlmann-Wang (SIAM J Math Anal 2018) が初めて線質硬化の超局所解析による本質の解明の研究を行って本質的に新しい優れた成果を得ているが、本研究はその高次元化である。d 平面変換の像はアフィン・グラスマン多様体 $G(d,n)$ 上の関数になるが、d 平面変換の canonical relation を具体的に記述するにはユークリッド空間の余接束 (相空間) との関係がよく見えるような $G(d,n)$ の余接束の座標系が必要である。このことは先行研究の対象である n=2 の場合、すなわち d=1,n=2 の場合に限りよく知られているが、それ以外の場合の具体的な記述を見つけることができなかった。本研究では独自の座標系を導入して canonical relation を具体的に記述する基盤を準備して実際に d 平面変換の canonical relation を求めた。粗く言って線質硬化は変換像の波面集合の非線形効果による相互作用の逆投影である。canonical relation を含めた超局所解析のいくつかの手法を駆使して「線質硬化は、任意の 2 つの金属部分の狭義凸有界領域に対して、それを共通に包み込む錘状または筒状の超曲面 L を特異台とする conormal distribution である」という結果を得た。これは n=2 の場合の自然な一般化となっている。本論文原稿 arXiv:2108.11067 は現在査読後の修正原稿の再査読中であるが、本論文原稿は現代の 3 次元 CBCT (cone beam CT) 等の基盤になっていて波及する可能性がある点が査読結果では評価されていた。

- (3) d=n-1 の場合、すなわちラドン変換の像などの超平面の空間 $G(n-1,n)$ 上のシュワルツ超関数の超局所化を与える複素数値相関数をもつフーリエ積分作用素を導入し、その超局所解析に関連する基本的な性質を調べた。これは CT スキャナーで言うところの観測データの超局所化を与える手法を構築することが目的である。一般のアフィン・グラスマン多様体上での成果が得られていないことは今後の課題である。n=2 の場合は断層撮影の CT スキャナーの観測データの超局所化を与えていると言ってよい。応用数学の様々な分野で「CT スキャナーの限られた観測データからより良い再生画像を得る方法の研究」がなされており、超局所解析と深層学習を利用した最先端の研究もあるが、観測データの超局所解析に直接踏み込んでいる研究がなく、ささやかな本研究の成果も役に立つかもしれないと期待している。本論文原稿 arXiv:2007.12365 は現在査読後の修正原稿の再査読中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroyuki Chihara	4. 巻 31
2. 論文標題 Inversion of seismic-type Radon transforms on the plane	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Integral Transforms and Special Functions	6. 最初と最後の頁 998 ~ 1009
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10652469.2020.1775202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyuki Chihara	4. 巻 49
2. 論文標題 Inversion of Higher Dimensional Radon Transforms of Seismic-Type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Vietnam Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1185-1198
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10013-020-00446-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyuki Chihara	4. 巻 43
2. 論文標題 Bargmann-type transforms and modified harmonic oscillators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6. 最初と最後の頁 1719-1740
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40840-019-00771-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hiroyuki Chihara
2. 発表標題 Microlocal analysis of d-plane transform on the Euclidean space
3. 学会等名 Happening Virtually: SIAM Conference on Imaging Science (IS22) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Chihara
2. 発表標題 Microlocal analysis of d-plane transform on the Euclidean space
3. 学会等名 Geometric Structures and Differential Equations - Symmetry, Singularity, and Quantization - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Chihara
2. 発表標題 Microlocal analysis of d-plane transform on the Euclidean space
3. 学会等名 Analysis on Metric Space Seminar, Okinawa Institute of Science and Technology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Naha Symposium on Spectral and Scattering Theory	開催年 2020年～2020年
------------------------------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------