

令和 4 年 5 月 8 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03571

研究課題名(和文) 特異積分と関数空間の研究(多重線形作用素のさらなる発展)

研究課題名(英文) A study of multilinear operators

研究代表者

古谷 康雄 (Furuya, Yasuo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：70234903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：3重線形ヒルベルト変換 $H(a,b,c)$ のルベグ空間での有界性に関しては、臨界指数 $1/3$ まで有界性が下がることが予想されていたが、Demeter と Kuk and Li が特別なパラメータ (a,b,c) のときは $1/3$ まで下がらないことを証明した。我々はすべてのパラメータにおいて $1/3$ まで下がらないことを証明できた。実は $1/2$ より下がらないという状況証拠があるので次の目標はこれを証明することである。多重線形分数べき作用素の重みつき評価に関するStein-Weissの不等式を以前証明したが、そのときの重みに関する条件が最良であることを証明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重線形ヒルベルト変換のルベグ空間上での有界性に関しては、2重線形の場合でも完全には分かっていない難しい問題であるが、3重線形の場合には2重線形の場合には起こらない不思議な現象(作用素の定義するパラメータに依存する現象)がDemeter と Kuk and Li により発見された。我々は実際にはパラメータには依存しないのではないかと我々の予想に関する状況証拠を得ることが出来た。次の目標はこの予想の証明である。

研究成果の概要(英文)：We study multilinear singular integral operators; the bilinear and trilinear Hilbert transform and fractional integral operators. We obtain weighted Stein-Weiss inequalities for multilinear fractional integrals.

研究分野：実解析学

キーワード：多重線形作用素 ヒルベルト変換 分数べき作用素 重み付き評価

1. 研究開始当初の背景

これまで「特異積分と関数空間の研究」というテーマで研究をしてきた。特にコーシー積分作用素と呼ばれる実関数論、複素関数論の両方において重要である作用素を研究する中で多重線形作用素の重要性を理解し、研究の中心をそちらに向けることにした。

多重線形特異積分作用素は非線形偏微分方程式を研究する中で自然に現れるものであるだけでなく、近年は調和解析における重要な研究テーマとなっていた。特に2重線形ヒルベルト変換

$$H(a,b)(f,g)(x) = \int f(x-ay)g(x-by)/y \, dy$$

の有界性「 $L_p \times L_q \rightarrow L_r$ は $r > 1/2$ において成り立つか？」は「カルデロン予想」と呼ばれ20世紀から21世紀に引き継がれた未解決問題である(現在は $r > 2/3$ まで証明されている)。

我々はヒルベルト変換より特異性が小さい分数べき積分作用素の性質についてまず研究して、その結果を足掛かりに特異積分作用素の研究に入ろうと思っていた。特に特異性の弱い多重線形分数べき積分作用素のルベーク空間上での重み付き有界性に関する重みの条件は完全に知られていたので、特異性の強いもう一つの分数べき積分作用素についても必要十分条件を見つけないかと思っていた。

2. 研究の目的

多重線形分数べき積分作用素には特異性の強いものと弱いものの2種類があり、どちらもそのルベーク空間での有界性は完全に分かっていた。特異性の弱い方に関しては重み付きルベーク空間での評価についても分かっていたが、強い特異性をもつ作用素では、不完全な結果しか知られていないので、必要十分条件を見つけないかと思った。強い特異性を持つ作用素の性質が分かれば、それを足掛かりにさらに特異性の強い多重線形ヒルベルト変換の性質を調べる計画でいた。

3. 研究の方法

研究課題を具体化した数本のテーマに沿って、研究代表者、研究分担者とその研究協力者の個別研究の推進とともに、分担者間の直接の研究交流を最も重要視して研究を進める。そのために、いくつかの研究テーマによる研究分担者会議と研究集会を開催することを基本にして基盤研究を推進する。具体的には前年まで古谷-澤野が行っていた「調和解析駒場セミナー」と古谷-松山が行っていた「中大偏微分方程式セミナー」を「調和解析中大セミナー」と統合して月1回開催する。その際に研究分担者会議を開く。毎年3月に「調和解析セミナー」を京都大学の筒井容平と共同で開催する。毎年11月開催の「実解析学シンポジウム」に参加して情報収集、意見交換を行う。

4. 研究成果

多重線形分数べき積分作用素(簡単のため2重線形の形で書く)

$$J_\alpha(f, g)(x) = \int \int f(x-y)g(x-z)/(|y| + |z|)^{2-\alpha} \, dx \, dy$$

の直積ルベーク空間上での $L_p(u) \times L_q(v) \rightarrow L_r(uv)$ の形の重み付き有界性に関する重み u, v の必要十分条件は分かっていたが、それよりも特異性の大きい

$$I_\alpha(f, g)(x) = \int f(x-y)(x-2y)/|y|^{1-\alpha} \, dx \, dy$$

という形の分数べき積分作用素が有界となるための重みに関する条件は非常に強い十分条件しか知られていなかったが、それより弱い形の十分条件を見つけないかということができた。さらに J_α の場合に知られていた Moen による Muckenhoupt 型の必要十分条件よりも強い条件が必要であることも分かった。

重みの形を $|x|^{\{a\}}$ の形の power weight に限ると

$$I_\alpha : L_p(|x|^a) \times L_q(|x|^b) \rightarrow L_r(|x|^c) \text{ 有界}$$

になるための指数 a, b, c に関する必要十分条件を見つけないかということができた。

線形の分数べき作用素の重み付きルベーク空間において、Stein-Weiss の不等式と呼ばれる不等式があり、関数 $f(x)$ を radial 関数に限るとソボレフの不等式の指数を改良できるというものがある。この不等式の多重線形版を J_α に対して証明することが出来た。さらにその証明方法は、従来の線形の場合においても別証明を与えた分かりやすい証明になっている。その時仮定した重みに関する条件が最良であることも証明できた。

3重線形ヒルベルト変換

$$H(a,b,c)(f,g,h)(x) = \int f(x-ay)g(x-by)h(x-cy)/y \, dy$$

は2重線形の場合から予想されることは

$$L_p \times L_q \times L_r \rightarrow L_s \text{ 有界}$$

は $s > 1/3$ において成り立つのではないかということであった。ところが、Demeter や Kuk and Li は a, b, c が特別な無理数のパラメータの場合には $1/3$ まで有界性が下がらないということを示した。2重線形の場合にはパラメータに依存するような結果は知られていなか

ったので、これは驚くべき結果であった。我々は実はパラメータ a, b, c に関係なく、どのような場合でも $1/3$ まで有界性が下がらないことを反例によって示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yasuo Komori-Furuya	4. 巻 71
2. 論文標題 Weighted estimates for bilinear fractional integral operators:	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 25--37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Komori-Furuya	4. 巻 292
2. 論文標題 Weighted estimates for bilinear fractional integral operators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1751--1762
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Komori-Furuya and Enji Sato	4. 巻 23
2. 論文標題 Weighted estimates for multilinear fractional integral operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Ineq. and Appl.	6. 最初と最後の頁 245--256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	澤野 嘉宏 (Sawano Yoshihiro) (40532635)	中央大学・理工学部・教授 (22604)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	松山 登喜夫 (Matsuyama Tokio) (70249712)	中央大学・理工学部・教授 (32641)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関