

令和 5 年 5 月 12 日現在

機関番号：17501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03586

研究課題名（和文）距離空間上のSobolev型不等式の研究

研究課題名（英文）Sobolev's inequality on metric measure spaces

研究代表者

大野 貴雄（Ohno, Takao）

大分大学・教育学部・教授

研究者番号：40508511

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、有界な距離空間上のHerz型Morrey-Musielak-Orlicz空間における極大作用素の有界性について研究を行い、それをもとに、有界な距離空間上のHerz型Morrey-Musielak-Orlicz空間において、Rieszポテンシャルに対するSobolev型の不等式が成り立つことを示した。さらに、有界な距離空間上の積分型Morrey-Musielak-Orlicz空間においても、Sobolev型の不等式が成り立つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究対象である距離空間上のHerz型Morrey-Musielak-Orlicz空間は、様々な関数空間などを包括した関数空間であるため、本研究で得られた成果は、様々なタイプの楕円型偏微分方程式の解の存在や、多様体上の微分幾何学、グラフ上の解析学などでの幅広い分野で応用されることが期待される。また本研究の成果は、宇宙開発への応用、ブレーキ、クラッチなどの応用デバイス開発、または、次世代フルードパワーシステムとして多くの分野で実用化・製品化への貢献が期待でき、社会貢献に大きなものが期待される。

研究成果の概要（英文）：In this work, we gave the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces over bounded non-doubling metric measure spaces and established a generalization of Sobolev-type inequalities for Riesz potentials of functions in such spaces. Furthermore, we were concerned with Sobolev-type inequalities for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces of an integral form over bounded non-doubling metric measure spaces.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：Sobolev型の不等式 Morrey-Musielak-Orlicz空間 距離空間

1. 研究開始当初の背景

古典的な偏微分方程式において、Sobolev の不等式は解の存在や正則性を示すうえで、非常に有用なツールである。また、Sobolev の不等式を示す際に有用な不等式として、Riesz ポテンシャルに対する Sobolev 型の不等式がよく知られている(以下 Sobolev 型の不等式と呼ぶ) 実際、よく知られた Sobolev の積分表示と上記の Sobolev 型の不等式を用いることで、Sobolev 空間における Sobolev の不等式を示すことができる。そのため、様々な偏微分方程式の解の存在や正則性の研究の更なる発展のために、古典的な Lebesgue 空間における Sobolev 型の不等式の研究だけに留まらず、「Lebesgue 空間の概念を拡張した Morrey 空間や Herz 空間などの関数空間においても、Sobolev 型の不等式が成り立つのか」ということが国内外多くの研究者によって、1900 年代後半から研究が続けられてきた。

一方 2000 年頃から、宇宙開発分野からの要請により、 p -ラプラス方程式をより一般化した $p(x)$ -ラプラス方程式の解空間(変動指数をもつ Sobolev 空間)の研究が必要とされるようになってきた。ここに $p(x)$ は定数関数ではなく変動する関数であることから、変動指数と呼ばれる。更に変分法分野において、次のような関数 $t^{p+a(x)}t^q$ の最小値問題も注目を浴びるようになってきた。このような科学技術分野や数学分野からの要請により、現在、上記のような関数空間をすべて含む Musielak-Orlicz 空間の研究が表舞台に出るようになり、解析学の分野で市民権を得てきた。よって、Sobolev 型の不等式の研究においても、「どの程度一般的な Musielak-Orlicz 空間において Sobolev 型の不等式が成り立つのか」ということが国内外様々な研究者によって、2000 年代前半から研究がされはじめてきた。

また、近年注目を集めているのが距離空間上での Sobolev 空間である。古典的には Sobolev 空間はユークリッド空間において定義されてきたが、一般の距離空間上での Sobolev 空間の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学、Riemann 多様体上の楕円型偏微分方程式などへの応用を念頭に、フィンランド学派を中心に、学際的かつ国際的に大きな進歩をしてきた。それにより、ユークリッド空間における Sobolev 型の不等式の研究だけに留まらず、「どの程度一般的な距離空間において Sobolev 型の不等式が成り立つのか」ということが国内外様々な研究者によって、近年盛んに研究が行われるようになってきた。

以上の学術的背景から、研究課題の核心をなす学術的な問い「どの程度一般的な関数空間で Riesz ポテンシャルに対する Sobolev 型の不等式が成り立つのか」が注目されるようになった。

2. 研究の目的

学術的背景や研究課題の核心をなす学術的な問い「どの程度一般的な関数空間で Riesz ポテンシャルに対する Sobolev 型の不等式が成り立つのか」の答えの 1 つとして、本研究は新しく距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間を定義し、その距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における Sobolev 型の不等式を示すことを目的とした。

3. 研究の方法

まず、Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間を新たに定義し、今後の研究に必要であろう諸性質について研究を行った。次に、距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における極

大作用素の有界性について研究を行った。実際，ユークリッド空間の場合では，Sobolev 型の不等式の研究を行う上で極大作用素の有界性が非常に有用なツールであることが分かっているため，距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間の場合でも，まずは極大作用素の有界性について研究を行った。そして，距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における極大作用素の有界性を用いることで，距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における Sobolev 型の不等式について研究を行った。

4．研究成果

本研究では，有界な距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における極大作用素の有界性について研究を行い，それをもとに，有界な距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間において，Riesz ポテンシャルに対する Sobolev 型の不等式が成り立つことを示した。

本研究対象である Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間は，Lebesgue 空間，Morrey 空間，Herz 空間，変動指数をもつ Lebesgue 空間や Musielak-Orlicz 空間などを包括した関数空間である。そのため，本研究で得られた結果は，国内外多くの研究者によって，様々なタイプの偏微分方程式の解の存在や正則性の研究に応用されることが期待される。加えてユークリッド空間だけでなく距離空間上での解析を行うため，実解析学だけでなく，多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などでの幅広い分野でも応用が期待される。以上より，本研究は関連研究分野の進展，新しい学問分野の開拓等に大きな学術的波及効果が期待される。また，正確な ER 効果と流れの形態のモデル化，その解の性質の研究が進み，宇宙開発だけではなく，プレーキ，クラッチなどの応用デバイス開発，または，次世代フルードパワーシステムとして多くの分野で実用化・製品化されることが期待でき，社会貢献に大きなものが期待される。

また，当初の計画では，距離空間上の Herz 型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間におけ Sobolev 型の不等式についてのみ研究を行うことが最終目標であったが，研究が当初の計画以上に進んだため，Herz 型と関連する距離空間上の積分型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における Sobolev 型の不等式についても研究を進めていくこととした。実際には，有界な距離空間上の積分型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間における極大作用素の有界性について研究を行い，それをもとに，有界な距離空間上の積分型 Morrey-Musielak-Orlicz 空間において，Riesz ポテンシャルに対する Sobolev 型の不等式が成り立つことを示した。これにより，更に様々なタイプの偏微分方程式の解の存在や正則性の研究に応用されることが期待され，上記同様に，社会貢献に大きなものが期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 46
2. 論文標題 Sobolev-Type Inequalities on Musielak-Orlicz-Morrey Spaces of an Integral Form	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6. 最初と最後の頁 31pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40840-022-01424-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 79
2. 論文標題 Generalized fractional integral operators on variable exponent Morrey type spaces over metric measure spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Portugaliae Mathematica	6. 最初と最後の頁 265 ~ 282
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PM/2092	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 26
2. 論文標題 On Sobolev-type Inequalities on Morrey Spaces of an Integral Form	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Taiwanese Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 831 ~ 845
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11650/tjm/220203	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohno T., Shimomura T.	4. 巻 167
2. 論文標題 Generalized fractional integral operators on variable exponent Morrey spaces of an integral form	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 201 ~ 214
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10474-022-01245-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 71
2. 論文標題 Sobolev-type inequalities on variable exponent Morrey spaces of an integral form	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ricerche di Matematica	6. 最初と最後の頁 189 ~ 204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11587-021-00635-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 67
2. 論文標題 Sobolev's inequality in central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces over metric measure spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Complex Variables and Elliptic Equations	6. 最初と最後の頁 1154 ~ 1185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/17476933.2020.1863382	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mizuta Yoshihiro, Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 40
2. 論文標題 Weak Estimates for the Maximal and Riesz Potential Operators in Central Herz-Morrey Spaces on the Unit Ball	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen	6. 最初と最後の頁 183 ~ 207
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/ZAA/1679	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 MIZUTA YOSHIHIRO, OHNO TAKAO, SHIMOMURA TETSU	4. 巻 242
2. 論文標題 HERZ-MORREY SPACES ON THE UNIT BALL WITH VARIABLE EXPONENT APPROACHING AND DOUBLE PHASE FUNCTIONALS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1 ~ 34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2019.18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maeda Fumi-Yuki、Mizuta Yoshihiro、Ohno Takao、Shimomura Tetsu	4. 巻 51
2. 論文標題 Boundedness of maximal operator, Hardy operator and Sobolev's inequalities on non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 13 ~ 55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/h2019141	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 OHNO TAKAO、SHIMOMURA TETSU	4. 巻 110
2. 論文標題 SOBOLEV'S INEQUALITY FOR MUSIELAK-ORLICZ-MORREY SPACES OVER METRIC MEASURE SPACES	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 371 ~ 385
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S144678871900034X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mizuta Yoshihiro、Ohno Takao、Shimomura Tetsu	4. 巻 23
2. 論文標題 Sobolev's theorem for double phase functionals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Inequalities & Applications	6. 最初と最後の頁 17 ~ 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/mia-2020-23-02	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohno Takao、Shimomura Tetsu	4. 巻 63
2. 論文標題 Sobolev's Inequality for Riesz Potentials of Functions in Musielak-Orlicz-Morrey Spaces Over Non-doubling Metric Measure Spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 287 ~ 303
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439519000286	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mizuta Yoshihiro, Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 65
2. 論文標題 Boundedness of the maximal and potential operators in Herz-Morrey type spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Variables and Elliptic Equations	6. 最初と最後の頁 1575 ~ 1589
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/17476933.2019.1669571	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mizuta Yoshihiro, Ohno Takao, Shimomura Tetsu	4. 巻 23
2. 論文標題 Sobolev's theorem for double phase functionals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Inequalities & Applications	6. 最初と最後の頁 17 ~ 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/mia-2020-23-02	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 大野貴雄
2. 発表標題 Boundedness of the maximal operator for double phase functionals with variable exponents
3. 学会等名 第62回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

大分大学教育学部教育研究所
<http://www.ed.oita-u.ac.jp/kykenkyu/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------