

令和 6 年 5 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03587

研究課題名（和文）変分問題、最適化問題と非線形偏微分方程式の総合的研究

研究課題名（英文）Studies on variational problems, optimization problems and nonlinear partial differential equations

研究代表者

倉田 和浩（Kurata, Kazuhiro）

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：10186489

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において、パターン形成に関わる様々な数理モデル（FitzHugh-Nagumo反応拡散系、シュナッケンバーグ化学反応モデル、Keller-Segel走化性も出る等）の定常問題に現れる様々な非線形楕円型境界値問題の解の構造に関する研究、また、非線形シュレディンガー方程式系における変分問題のエネルギー最小解の存在や漸近挙動の研究を中心に行い、それぞれ一定の成果を挙げる事ができた。他にも磁場シュレディンガー方程式の逆問題の研究やコンパクトメトリックグラフ上での問題でネットワーク構造と解の構造との関係を明らかにすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

様々なパターン形成問題の定常パターン形成のメカニズムを非線形楕円型微分方程式で記述される数理モデルの精密な数学解析を通して、理解することができるという点で、学術的意義は深いと考えている。様々な複雑な自然現象の基本的なメカニズムが単純な数理モデルに内在することを示しているという点で、数学解析の持つ社会的意義は大きいと思われる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we treated several nonlinear elliptic boundary value problems associated with corresponding pattern formation phenomena, for example FitzHugh-Nagumo system, Schanekenberg model, Keller-Segel chemotaxis model. Moreover, we also studied an inverse boundary value problem for the magnetic Schroedinger equation and several nonlinear elliptic problem on compact metric graphs.

We obtained results to clarify the relationship between the network structure of the compact metric graphs and the structure of solutions.

研究分野：変分問題と非線形偏微分方程式

キーワード：変分問題 パターン形成 非線形シュレディンガー方程式 逆問題 凝集現象 漸近挙動 メトリックグラフ

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

さまざまな物理現象、化学現象や生命現象に現れる特徴的なパターンの出現の理解を非線形偏微分方程式を用いた数理モデルで記述し、その数学解析を通して、現象のメカニズムを数理的に理解することは基本的なテーマである。変分構造を持つ数理モデルでは、対応するエネルギー汎関数の最小点や極小点のみならず、鞍点にあたる臨界点に相当する解の重要性も時間発展問題における遷移課程の理解にも不可欠であることはよく知られている。

特に、極限的なパラメータ領域での解の詳細な形や、凝集現象、内部遷移層、境界遷移層の出現を理解することは、深い知見をあたえてくれることも、多くのすぐれた研究によって活発に推進されてきた。本研究では、この流れをさらに推進すべく、様々な変分問題やパターン形成問題における解構造を、環境効果やネットワーク構造の効果の主眼として、解明していこうとするものである。

2. 研究の目的

さまざまな変分問題やパターン形成の定常問題に現れる非線形楕円型境界値問題の解の構造を、領域やパラメータによって解明していくことで、それぞれの問題に特徴的な解のメカニズムを理解することを目的としている。特に、数理モデルにおける環境効果を表す非一様な係数が及ぼす解構造への影響、特に解の凝集現象における凝集点の位置を明らかにすること、また、特別なネットワーク構造をモデルとしたメトリックグラフの幾何構造が解の凝集点の位置にどのように影響を及ぼすのか、漸近解析を用いて明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

対応する特徴的なパターンを持つ解の存在証明には、主に変分法を用いて捕まえる。領域が全空間などの場合、コンパクト性の崩れ現象が起こりうるため、解の持つエネルギーの精密な評価を得る必要があり concentration-compactness の手法やエネルギーの劣加法性などの見極めを必要とする。有界領域の場合、解の存在は標準的であるが、いわゆる特異極限を考えての、解の凝集現象の解析を、漸近解析を駆使して、凝集現象が実際に起こること、さらには凝集点の位置の決定問題をリャプノフ・シュミット法を用いたり、対応する極限問題を見極めることで解明する。極限問題の解は、凝集状態をあらわす解のプロファイルを記述することにもなり重要な役割を果たす。

4. 研究成果

(1) 梶原堯氏(当時、大学院生)との共同研究で、パターン形成にかかわる FitzHugh-Nagumo 反応拡散系のヘテロクリニック定常解の構成と詳細なエネルギー漸近展開を得ることに成功した。

(2) 長田祐輝氏(埼玉大)との共同研究で、3波相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式系に付随する変分問題のエネルギー最小解の存在問題と解の漸近挙動を得ることに成功した。従来の Ardila や Pomponio らによる既存結果の拡張となっている。特に、3波相互作用の強さを表すパラメータの閾値が存在して、それ未満だとエネルギー最小解は1成分のみの状態となり、それより大きいと、3成分とも生き残る解であることを明らかにした。

(3) 柴田将敬氏(名城大)との共同研究で、コンパクトメトリックグラフ上での非線形楕円型境界値問題で特異摂動パラメータ領域において、エネルギー最小解のエネルギーの精密な漸近展開公式を求め、凝集点の位置を決定する結果を得た。これは、空間高次元での Ni と Takagi による先駆的な研究のメトリックグラフ版ともいえよう。さらに、エネルギーの高い解の構成は今後さらに発展していくと思われる。その後、磁場効果を含んだ場合へのエネルギー漸近公式を第一近似まで得ることに、李雷氏(当時、大学院生)との共同研究で成功した。さらなる詳細な漸近公式の導出は今後の課題である。

(4) 石井裕太氏(茨城高専)との共同研究で、自己触媒反応を持つ化学反応現象を記述するシュナッケンバーグ数理モデルにおいて、Iron-We-Winter らによる区間上の研究を、環境効果が入った場合に拡張し、さらには、コンパクトメトリックグラフ上での問題に拡張し、解の凝集点とメトリックグラフのネットワーク構造との関係を明らかにすることに成功した。環境効果とグラフのネットワーク構造と両方の効果で、凝集点の位置が決まることを明確に取り出した結果であり、また解の線形安定性の解析にも成功している。その後、石井氏によって、この理論はさらに推進されており、コンパクトメトリックグラフ上での生物の形態形成現象を記述する Gierer-Meinhardt 系の凝集点の位置の解明も進められている。

(5) Keller-Segel による走化性数理モデルにおける解の凝集現象を、コンパクトメトリックグラフ上での問題に拡張し、付随するグリーン関数の最大値に関する最適化問題により、解の凝集点の位置が決定されることを発見した。いくつかの典型的なメトリックグラフに対して、グリーン関数を具体的に計算することができ、各メトリックグラフにおいて凝集点の具体的な決定を行う計算もできている。

(6) 山下龍生氏(大学院生)との共同研究で、磁場シュレディンガー方程式の境界値逆問題に

において、境界での Dirichlet-Neumann データから、内在する欠陥の凸包を求める再構成公式を得ることに成功した。これは、池畠優氏（広島大）によって開発された、いわゆる囲い込み法を磁場シュレディンガー方程式に適応したものであるが、磁場効果による複素幾何光学解として Sun による構成した解を活用し、また基本的評価における磁場効果の役割を精密にとらえることができた点が、成功したポイントである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazuhiro Kurata and Yuki Osada	4. 巻 27
2. 論文標題 Variational problems associated with a system of nonlinear Schroedinger equations with three wave interaction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Disc, Conti. Dyn. Syst.	6. 最初と最後の頁 1511,1547
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdsb.2021100	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Kurata and Ryusei Yamashita	4. 巻 45
2. 論文標題 Reconstruction of the Defect by the Enclosure Method for Inverse Problems of the Magnetic Schroedinger Operators	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tokyo J. Mathematics	6. 最初と最後の頁 547,577
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179363	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuta Ishii and Kazuhiro Kurata	4. 巻 20
2. 論文標題 Existence of multi-peak solutions to the Schnakenberg model with heterogeneity on metric graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comm. Pure Appl. Anal.	6. 最初と最後の頁 1633, 1679
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/cpaa.2021035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Kurata and Yuki Osada	4. 巻 20
2. 論文標題 Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schroedinger system with three wave interaction.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comm. Pure Appl. Anal.	6. 最初と最後の頁 4239,4251
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/cpaa.2021157	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Kurata and Yuki Osada	4. 巻 27
2. 論文標題 Variational problems associated with a system of nonlinear Schroedinger equations with three wave interaction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Disc. Conti. Dyna. Sys.	6. 最初と最後の頁 1511,1547
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2021100	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Kurata and Masataka Shibata	4. 巻 491
2. 論文標題 Least energy solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2020.124297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuta Ishii and Kazuhiro Kurata	4. 巻 39
2. 論文標題 Existence and stability of one-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with heterogeneity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Contin. Dyn. Syst.	6. 最初と最後の頁 2807-2875
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcsd.2019118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Kajiwara and Kazuhiro Kurata	4. 巻 26
2. 論文標題 A Singular Perturbation Problem for heteroclinic Solutions to the FitzHugh-Nagumo Type Reaction-Diffusion System with heterogeneity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 141-199
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuta Ishii and Kazuhiro Kurata	4. 巻 2146
2. 論文標題 Construction and stability analysis of one-peak symmetric stationary solutions to the Schnakenberg model with heterogeneity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 03-116
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 倉田 和浩
2. 発表標題 Green functions, Keller-Segel's chemotaxis model and eigenvalue optimization problems on compact metric graphs
3. 学会等名 第13回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 倉田 和浩
2. 発表標題 Concentration phenomena of Keller-Segel's minimal chemotaxis model on compact metric graphs
3. 学会等名 RIMS「常微分方程式の定性的理論の発展とその応用」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 倉田 和浩
2. 発表標題 Nonlinear elliptic singular perturbation problems on compact metric graphs
3. 学会等名 第9回偏微分方程式レクチャーシリーズin福岡工業大学 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kazuhiro Kurata
2. 発表標題 On some variational problem related to a reaction-diffusion system with mass conservation on a metric graph
3. 学会等名 Workshop on Variational Methods and Functional Inequalities (OCAMI) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 倉田 和浩
2. 発表標題 空間非一様な係数を含む交差拡散数理モデルにおけるシャドウ系とその解析
3. 学会等名 RIMS研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 倉田 和浩
2. 発表標題 メトリックグラフ上のいくつかの特異極限問題の解の存在と形状について
3. 学会等名 早稲田大学応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuhiro Kurata
2. 発表標題 Location of spikes of spiky stationary solutions to some nonlinear elliptic problems on compact metric graphs
3. 学会等名 「微分方程式の総合的研究」 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kazuhiro Kurata
2. 発表標題 On an optimization problem of the first eigenvalue of the Laplacian on a thin domain with Neumann window
3. 学会等名 「解析学特別研究セミナー」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuhiro Kurata
2. 発表標題 compact metric graph上のある特異摂動問題の凝縮解について
3. 学会等名 「第29回数理物理と微分方程式」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuhiro Kurata
2. 発表標題 3波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の特異摂動問題
3. 学会等名 「第14回非線形偏微分方程式と変分問題」
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 倉田 和浩	4. 発行年 2020年
2. 出版社 数理工学社	5. 総ページ数 227
3. 書名 フーリエ解析の基礎と応用	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kurata's Home Page
<https://tmu-kurata.fpark.tmu.ac.jp/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------