

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03592

研究課題名(和文) 超汎関数空間の構成に基づく無限次元確率解析の新展開及び量子情報論への応用

研究課題名(英文) New developments in infinite dimensional stochastic analysis based on constructions of spaces of generalized functionals and applications to quantum information theory

研究代表者

齊藤 公明 (Saito, Kimiaki)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本基盤研究を通じ、特にホワイトノイズ超汎関数空間の構成に基づき、一つの無限次元確率解析を構築し、量子確率論、量子情報解析への応用展開において成果を多く得た。本研究における確率解析において基盤となるホワイトノイズ超汎関数空間を直ウィナー積分として捉え直し、高次レヴィラプラシアン の定義域をランダム化して、その生成する無限次元ブラウン運動の連続時間表現に成功した。さらに無限次元ブラウン運動を変数とするデルタ超汎関数に関する確率解析を展開し新しいホワイトノイズ超汎関数解析を構築した。その他、チェザロ型量子大数の法則と高次レヴィラプラシアンの特徴づけについて量子確率論的意義を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超汎関数空間を新しく構成し、無限次元ブラウン運動のべき乗を定義することに成功した結果は、量子場の理論での発散量 (0) を超汎関数として定式化することにより繰り込み無しで回避することができるという独自性があり、この超汎関数空間を基に新しい超汎関数空間を構成し、無限次元確率解析を構築する。本研究は場の理論の Yang-Mills 方程式と等価である Levy Laplace 方程式の研究基盤となるものである。本研究における確率解析の理論面の整備、応用展開は他にない独創的な研究であり、無限次元解析に新手法を導入し、量子確率論、量子情報論、量子力学系理論などへの展開を新しいものとする意義のある研究である。

研究成果の概要(英文)：Through this basic research, especially based on the construction of spaces of white noise distributions, we constructed an infinite dimensional stochastic analysis, and obtained many results in the development of applications to quantum probability theory and quantum information analysis. We have reconsidered the spaces of white noise distributions as a direct Wiener integral, randomized the domain of the higher order Levy Laplacian, and succeeded in representing the infinite dimensional Brownian motion in continuous time. Moreover, we developed a stochastic analysis on delta distributions of an infinite dimensional Brownian motion and constructed a new analysis of white noise distributions. In addition, we gave the significance of quantum probability theory to the law of Cesaro-type quantum large numbers and a characterization of higher order Levy Laplacian.

研究分野：確率解析学

キーワード：超汎関数空間 無限次元確率解析 無限次元ラプラシアン 量子確率過程 量子確率論 ホワイトノイズ理論 力学系理論 数理ファイナンス

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者齊藤は特に、ホワイトノイズ超汎関数空間に働くある種の作用素を基に新しい確率解析として、無限次元解析を展開している。これまでに無限次元確率過程の構成方法における新しい展開を論文にまとめ、いくつかの成果を得ている。特に、最近得た成果は場の理論における発散量 (0) を一つの超関数として数学的に定式化し、ホワイトノイズのべき乗を捉えるという極めて独創的なものであり、これは Lévy Laplace 方程式と Yang-Mills 方程式の等価性に根本的に係る成果である。この成果をもとに、無限次元確率解析の理論再構築・整備をし、研究分担者の三町のエルゴード理論、量子力学系理論研究、研究協力者の尾畑の量子ホワイトノイズ理論、内村の分枝過程理論、複雑ネットワーク論、Accardi の量子確率論、Kuo のホワイトノイズ空間上の無限次元ラプラシアン研究に応用展開することを目的とし本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、さらに量子情報解析として新しいアプローチを展開し、更に、量子確率論、量子力学系理論などに応用することにある。ホワイトノイズ微分が量子計算論に応用できるため、その展開をも行う。

齊藤は、超関数空間を新しく構成し、繰り込みをせずに、無限次元ブラウン運動のべき乗を定義することに成功した。本結果により、量子物理での発散量 (0) を回避(数学的定式化)することが期待でき、本研究においては、この超関数空間を基に新しく超汎関数空間を構成し、無限次元確率解析を構築する。この研究は場の理論の Yang-Mills 方程式と等価である Lévy Laplacian による Laplace 方程式の研究の基盤となるものである。

本研究における確率解析の理論面の整備、およびその応用展開は他にない独創的な研究であり、無限次元解析に新しい手法を導入し、更に、量子確率論、量子情報論、量子力学系理論などへの展開を新しいものとする意義のある研究である。

3. 研究の方法

本研究課題を円滑に遂行するため、下記のような研究体制をとり、海外の研究協力者として、長年共同研究を続けてきたイタリアローマ第一大学の L. Accardi 教授、米国ルイジアナ州立大学の H.-H. Kuo 教授に依頼し、国際的に共同研究を進めた。役割分担については以下の通りである。

齊藤公明 (研究代表者): 研究総括及び超汎関数空間論、無限次元確率解析の研究

三町祐子 (研究分担者): 数論的確率論、エルゴード理論、力学系理論などへの応用

内村佳典 (研究協力者): 分枝過程論、複雑系理論、計算機シミュレーション、数式処理などへの応用

尾畑伸明 (研究協力者): 量子ホワイトノイズ理論、グラフ上のスペクトル解析などへの応用

Luigi Accardi (研究協力者): 量子確率論への応用

Hui-Hsiung Kuo (研究協力者): ホワイトノイズ空間上の Fourier 解析及び積分論への応用

特に、研究分担者とは密に連絡を取り合い、下記の実践方法を実施した。◆数学、物理、経済等関連分野のセミナー、研究会を主にオンラインにて開催し、各界の研究者達との議論、共同研究を行った。◆他大学、関連機関等の研究者にレヴューとしての講演を依頼した。◆海外の研究者と共同研究を行った。◆関連の研究集会へ参加し、招待講演、研究発表を行った。◆計算機数式処理システムを充実させ、量子計算、確率過程シミュレーションなどの数理的実験を行った。コロナ禍であったためオンラインにて実施することが多くなったが、年度が進むに連れて研究内容も収束してゆくようにした。

本研究ではホワイトノイズを確率変数の素子と考えることにより、一貫して研究を進めることができた。ホワイトノイズ微分が消滅作用素、その共役作用素が生成作用素の役割を果し、量子ホワイトノイズ、量子ブラウン運動をこの無限次元確率解析の立場から記述することができる。この立場から相互の関連を深めながら共同研究を進めた。海外との共同研究は、主に、研究代表者齊藤、研究協力者 Accardi, Kuo により、量子情報解析としてのホワイトノイズ作用素解析を議論し、問題点提起、論文作成を行った。三町、尾畑、齊藤により、チェザロ型量子大数の法則と高次 Lévy Laplacian の特徴づけを行い、問題提起および成果をまとめた。加えて、計算機実験に基づく確率過程シミュレーションに関連するアルゴリズムの開発を行った。研究の還元として時系列解析に応用することにより、数理データサイエンスにおいても展開を試みた。

4. 研究成果

本基盤研究の研究期間を通して、特に超汎関数空間の構成に基づき、無限次元確率解析を構築し、量子情報論等への応用展開を行った。得られた主な成果として、下記を挙げる。

(1) フォック空間における指数超汎関数に基づき、ホワイトノイズ超汎関数値の Wiener 積分

の構成する高次 Lévy Laplacian (exotic Laplacian)の定義域を構成し, そのラプラシアン Δ の生成する無限次元ブラウン運動の構成法を新たに提唱した. これはフォック空間をランダムに捉える他に類のない構成法であり, この方法により, 無限次元ブラウン運動を2次元パラメータホワイトノイズの積分で表す連続表現ができることを導いた. この方法は後に研究協力者の Accardi 氏によりホワイトノイズシフト作用素の理論に応用されることになった. (学術論文1件目)

(2) ホワイトノイズ超汎関数上に作用する Lévy Laplacian の関数の生成する無限次元確率過程の構成法を与え, Lévy Laplacian と個数作用素を関連付ける作用素を導入した. これにより, Lévy Laplacian の生成する (C_0) -半群と無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程の関連性を得ることができた. この結果により Lévy Laplacian が量子場のフォック空間の構成に関連することが分かり, 今後の展開が期待される. (学術論文2件目)

(3) 無限次元ブラウン運動を変数とするデルタ超汎関数に関する確率解析を展開し, 無限次元ブラウン運動の超汎関数解析を構築した. これにより無限次元ラプラシアン (高次 Lévy Laplacian) に基づく超汎関数微分方程式を導出することができた. この成果に基づき, Accardi 氏, Ji 氏とともにこのデルタ超汎関数の掛け算作用素から量子ホワイトノイズ微分方程式を導出し, 量子情報解析として更なる展開を行い, 論文をまとめた. この方程式はポゴリューボフ変換, ギルサノフ変換の量子拡張に深く関連し, 量子情報解析の基盤となるに至った. (学術論文3件目)

(4) 無限次元超関数の S -変換に対して解析的特徴付け定理を与え, その証明に成功した. ある種の解析的かつ増大条件のもとにホワイトノイズテスト関数空間の核型性が S -変換の必要十分条件になる成果は長年得られていなかった問題を解決したものである. (学術論文4件目)

(5) 確率積分の伊藤の理論における指数過程は乗法的繰り込み, マルチンゲール, 確率微分法 r 定式の3つの方向から考察できる. これらの3つの観点から, 非適合指数過程の研究を提唱した. 非適合な確率積分に対するマルチンゲール性のアナログとして, ニア・マルチンゲール性を新しく導入し, これに基づいた確率微分方程式の理論を構築することに成功した. この理論の立場は伊藤の理論とはかなり異なるものとなった. (学術論文5件目)

(6) チェザロ型量子大数の法則と高次 Lévy Laplacian の特徴づけについて研究分担者の三町氏と共同して論文をまとめて投稿した. この結果は量子大数の法則の収束先が高次 Lévy Laplacian の関数となっていて, 無限次元ラプラシアンの量子確率論的意味を与えることができた. 作用素論上で大数の法則を考える際の期待値に対応するものと考えられる.

(7) 高階フラクショナル差分方程式を議論することにより, 高階フラクショナルポアソン過程の分布との関連性を明らかにし, 更に高階フラクショナルポアソンノイズに基づいた確率解析を構築することに成功した. 更に関連して Hille-Yosida の定理の拡張を得ることができ, 新しい解析学に繋がる研究となった.

(8) 研究代表者が考案する超関数同士の積に閉じている新しい超関数空間上の確率解析の立場から, (2)のデルタ超汎関数を考察し, 量子場における発散量を示す超関数との関連性の研究も継続している. 無限次元ブラウン運動のべき乗を中心としたデルタ超関数は, ランダムな方向をもつ微分作用素を含む確率微分方程式をみたすことがわかる. この方向から量子確率微分方程式にアプローチすることも可能であり, 超汎関数空間論的確率解析の他分野への展開は他に類のない独自の研究内容となっている. 関連した成果は2023年 World Scientific 社発行の Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. 32, "Infinite Dimension Analysis, Quantum Probability and Related Topics" に Powers of White Noise Associated with the Product of Distributions (by Shinya Hibino and Kimiaki Saitô)なる題目にて論文が掲載予定となっている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Luigi Accardi, Un Cig Ji, Kimiaki Saito	4. 巻 3
2. 論文標題 Domain of exotic Laplacian constructed by Wiener integrals of exponential white noise distributions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 1 - 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.31390/josa.3.3.01	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimiaki Saito	4. 巻 2
2. 論文標題 The Levy Laplacian and Stochastic Processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Infinite dimensional harmonic analysis (KURENAI 登録2021)	6. 最初と最後の頁 306 - 318
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Luigi Accardi, Ai Hasegawa, Un Cig Ji, Kimiaki Saito	4. 巻 23
2. 論文標題 White noise delta functions and infinite-dimensional Laplacians	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 2050028-1, 21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025720500289	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Luigi Accardi, Un Cig Ji and Kimiaki Saito	4. 巻 22
2. 論文標題 Characterization of S-transform for general construction of infinite-dimensional distributions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 1950015-1, 19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025719500152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chii-Ruey Hwang, Hui-Hsiung Kuo and Kimiaki Saito	4. 巻 13
2. 論文標題 Anticipating exponential processes and stochastic differential equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications on Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 9-1, 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.31390/cosa.13.3.09	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件(うち招待講演 1件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Kimiaki Saito
2. 発表標題 White noise delta distributions and infinite dimensional Laplacians
3. 学会等名 Joint research on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Chungbuk National University (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Editorial Board: Journal of Stochastic Analysis https://digitalcommons.lsu.edu/josa/editorialboard.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	三町 祐子 (Mimachi Yuko) (00218629)	名城大学・理工学部・准教授 (33919)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ルイジ アカルディ (Accardi Luigi)	ローマ第 大学・経済学部・教授	
研究協力者	郭 輝雄 (Kuo Hui-Hsiung)	ルイジアナ州立大学・理学部・教授	
研究協力者	尾畑 伸明 (Obata Nobuaki) (10169360)	東北大学・情報科学研究科・教授 (11301)	
研究協力者	内村 佳典 (Uchimura Yoshinori) (40734661)	名城大学・理工学部・助教 (33919)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	University of Roma			
韓国	Chungbuk National University			
米国	Louisiana State University			