

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：22701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03603

研究課題名（和文）辺着色されたグラフの分割問題に関する研究

研究課題名（英文）A study on partition problems in edge-colored graphs

研究代表者

藤田 慎也 (Fujita, Shinya)

横浜市立大学・データサイエンス学部・准教授

研究者番号：60424206

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、グラフの辺に色が塗られた辺着色グラフ上の分割問題について研究を推進した。 $G$ を辺着色グラフとする。グラフの各頂点に接続する辺における異なる色の数をその点における色次数と呼び、各点の色次数の最小値を $G$ の最小色次数と呼ぶ。本研究課題では、 $G$ の頂点集合を二つのパート $A, B$ に分割し、それぞれの頂点部分集合が誘導する辺着色部分グラフが指定した最小色次数を実現するための色次数の条件に関する未解決問題について考察し、一定の研究成果をあげることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフの頂点集合を二つの部分集合に分割し、各パートで誘導されるグラフがある条件を満たすようにするというグラフの分割問題は重要であり、様々な関連問題に関する研究が国内外で盛んに進められている。本研究はこのようなグラフの分割問題を辺着色グラフ上で考察し、構造的グラフ理論の研究で有用な補題となり得るいくつかの定理を証明することに成功した。グラフ理論の問題は頂点数に関する帰納法で解かれることが多いため、当該分野の研究は重要であり、得られた研究成果は離散数学の様々な場面で応用が期待できると思われる。

研究成果の概要（英文）：In this work, we studied a graph partition problem in edge-colored graphs. For an edge-colored graph  $G$  and a vertex  $v$  in  $G$ , we define the color degree of  $v$ , which means the number of colors adjacent to  $v$  in  $G$ . There is an open problem concerning partitioning  $G$  into two parts such that each part satisfies some color degree conditions. We tackled the problem and obtained some new results in this area of study.

研究分野：組合せ論、特にグラフ理論

キーワード：辺着色グラフ グラフの分割問題 グラフの次数条件

## 1. 研究開始当初の背景

本研究は、研究代表者が最近の研究で提起した辺着色グラフの分割問題に関する予想について、部分的、もしくは可能であれば全面的に解決することを目標とした。研究では、国内外の研究者たちとの学术交流の機会を大事にしながら、多角的視点により予想の解決を目指したいと考えた。

さらに、本研究では、当該予想の解決に向けた考察過程で得られた知見を活かすことで、辺着色グラフの枠組みを超えて密なグラフの内部構造が把握出来るような、グラフ理論において汎用性の高い構造定理についてもその構築についても研究対象とし、多角的な視点から研究を推進した。

## 2. 研究の目的

$G$  を辺着色グラフとするとき、 $G$  の頂点  $v$  に接続する辺の色の数を  $v$  の色次数という。 $G$  の全ての頂点の色次数を見たときに、その最小値を  $G$  の最小色次数と呼ぶ。研究代表者は、「自然数  $a, b$  に対して、 $G$  の最小色次数が  $a+b+1$  以上であれば  $G$  の頂点集合を  $A, B$  二つの部分集合に分割して、 $A$  で誘導される辺着色グラフ  $G[A]$  が最小色次数  $a$  以上、 $B$  で誘導される辺着色グラフ  $G[B]$  が最小色次数  $b$  以上となるように出来る。」という予想を提起した。グラフ理論の定理は頂点数に関する帰納法で証明されるものが多い。このようなグラフ上の分割問題に関する予想を肯定的に解決することが出来れば、辺着色グラフ上の様々な未解決問題の解決につながる有用な補題となり得る。

以上の理由から、本研究の目的として、この予想の解決を提案し、研究を推進した。

## 3. 研究の方法

辺着色グラフの研究は海外でも盛んに研究が進められている。特に最近是中国でこの分野の研究が活発に推進されているため、中国における研究グループと積極的に学术交流をはかりながら当該予想の解決に取り組んだ。中国との国際共同研究を進めるに当たって、具体的には、Ruonan Li, Yandong Bai, Shenggui Zhangら西北工業大学の研究グループ、Guanghui Wangらによる山東大学の研究グループ、Henry Liuら中山大学の研究グループらとのディスカッションによって多くの知見が研究成果とともに得られることとなった。とはいえ、コロナ感染症の影響により、当初研究計画で予定していた海外への渡航や外国人共同研究者の招聘による対面での研究打ち合わせは全て不可能となり、Zoom によるオンラインディスカッションが中心となった。国内共同研究者との対面による研究打ち合わせについては研究期間後半においてはなんとか可能になったことから、海外の研究者グループとのオンラインディスカッションを交えたハイブリッドディスカッションのためにワーケーション施設を利用することでコロナ禍の難局を乗り越え、本研究を推進することが出来た。研究ではグラフの構造を深く考察することによる構成的証明手法や、確率論的証明手法、その他多角的アプローチから当該予想の解決に取り組んだ。

## 4. 研究成果

研究目的で述べた予想について、残念ながら予想の解決には至らなかったが、 $a, b$  が小さいときには予想が成り立つことを証明することに成功し、さらには確率論的証明手法を利用したアプローチで最小色次数の条件を緩和した形で予想の弱いバージョンについての証明を与えることに成功した。その他辺着色グラフに順序構造を入れたアプローチや支配数の観点からからも予想解決に向けた有用な補題となり得る研究成果を上げることに成功し、成果をまとめた論文が *Combin. Probab. Computing, Discrete Math., Discrete Applied Math, Order* といった権威ある査読付き国際学術雑誌に掲載することが出来た。

コロナ感染症の影響で、当初予定していた研究計画を予定通りに推進することが出来ず、1年間研究期間を延長することとなったが、予想の解決は実現しなかったものの解決につながる数々の有用な研究成果を得ることに成功したため、本研究は国内外で盛んに研究が進められている辺着色グラフの構造研究に対して一定の学術的貢献を提供出来たのではないかと自負している。

本研究で得られた主な成果については、日本数学会や応用数学合同研究集会で成果発表を行い、中国・西北工業大学が主催するグラフ理論の国際会議など、いくつかの国際会議においてもオンライン講演が主体となったが成果報告を行うことが出来た。これらの研究集会で成果発

表の機会から本研究の内容に興味をもった研究者たちとの学术交流が芽生え、本科研費課題を皮切りに新たな共同研究もスタートしている。残念ながら研究の主目的である予想の解決には至らなかったが、本研究で得られた多くの知見を活かして、引き続きこの予想の解決に取り組んでゆきたいと考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 7件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram	4. 巻 41
2. 論文標題 The optimal proper connection number of a graph with given independence number	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Optimization	6. 最初と最後の頁 100660 ~ 100660
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disopt.2021.100660	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 91
2. 論文標題 Stable structure on safe set problems in vertex-weighted graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103211 ~ 103211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2020.103211	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujita Shinya, Kitaev Sergey, Sato Shizuka, Tong Li-Da	4. 巻 38
2. 論文標題 On Properly Ordered Coloring of Vertices in a Vertex-Weighted Graph	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Order	6. 最初と最後の頁 515 ~ 525
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11083-021-09554-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujita Shinya	4. 巻 14
2. 論文標題 Optimal proper connection of graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Optimization Letters	6. 最初と最後の頁 1371 ~ 1380
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11590-019-01442-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 12301
2. 論文標題 Stable Structure on Safe Set Problems in Vertex-Weighted Graphs II -Recognition and Complexity-	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 LNCS	6. 最初と最後の頁 364 ~ 375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-60440-0_29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujita Shinya, Li Ruonan, Wang Guanghui	4. 巻 28
2. 論文標題 Decomposing edge-coloured graphs under colour degree constraints	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Combinatorics, Probability and Computing	6. 最初と最後の頁 755 ~ 767
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0963548319000014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujita Shinya, Furuya Michitaka, Magnant Colton	4. 巻 258
2. 論文標題 General upper bounds on independentk-rainbow domination	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 105 ~ 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2018.11.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujita Shinya, Ning Bo, Xu Chuandong, Zhang Shenggui	4. 巻 342
2. 論文標題 On sufficient conditions for rainbow cycles in edge-colored graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1956 ~ 1965
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.03.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Shinya Fujita
2. 発表標題 Various extensions on safe sets in graphs
3. 学会等名 Optimization and Algorithms (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 中心グラフの支配数に着目したグラフの分類について
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 三角形を含まない高連結グラフにおける非分離パスの存在について
3. 学会等名 2022年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 Connectivity keeping paths in highly connected graphs
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shinya Fujita
2. 発表標題 New classification of graphs in view of the domination number of central graphs
3. 学会等名 The 6th Xi'an International Workshop on Graph Theory and Combinatorics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 グラフの安全集合に関する最近の結果と未解決問題について
3. 学会等名 2021年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 辺着色グラフの rainbow connectivity に関する極値問題
3. 学会等名 2022年度日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田慎也
2. 発表標題 重み付きグラフ上の順序と頂点彩色に関する話題
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shinya Fujita
2. 発表標題 Some results on optimal proper connection number in edge-colored graphs
3. 学会等名 The 5th Xi'an International Workshop on Graph Theory and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤田慎也、Boram Park、佐久間雅
2. 発表標題 Stable Structure on Safe Set Problems in Vertex-Weighted Graphs II -Recognition and Complexity-
3. 学会等名 46th International Workshop, WG2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤田慎也、Sergey Kitaev、佐藤静佳、Li-Da Tong
2. 発表標題 On properly ordered coloring of vertices in a vertex-weighted graph
3. 学会等名 2020年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤田慎也、Boram Park
2. 発表標題 The optimal proper connection number of a graph with given independence number
3. 学会等名 2021年度日本数学会年会
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 Fujita Shinya
2. 発表標題 Recent progress on safe set problems in vertex-weighted graphs
3. 学会等名 International Conference on Graph Theory and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fujita Shinya
2. 発表標題 Some recent results on safe set problems in vertex-weighted graphs
3. 学会等名 2019 Workshop on the Theory of Colored Graphs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bai Yandong, Bang-Jensen Joergen, Fujita Shinya, Yeo Anders
2. 発表標題 Safe sets in digraphs
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤田慎也, Boram Park, 佐久間雅
2. 発表標題 Stable networks and connected safe set problem
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤田 慎也
2. 発表標題 グラフの optimal proper connection number に関する研究の進展
3. 学会等名 2020組合せ論とその周辺研究集会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Ajou University			
英国	University of Strathclyde			
デンマーク	University of Southern Denmark			
中国	山東大学	西北工業大学	中山大学	