

令和 4 年 6 月 6 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03606

研究課題名(和文)単調正規空間の積における C^* -, C -, P -埋め込みの研究研究課題名(英文)Study of C^* -, C -, P -embeddings in products of monotonically normal spaces

研究代表者

平田 康史(Hirata, Yasushi)

神奈川大学・工学部・特任准教授

研究者番号：70375400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は単調正規空間の積空間の位相的性質を明らかにすることである。矢島氏との共同研究で、可算離散空間 N の1個のコピーの積空間において、 C^* -埋め込みと C -埋め込みが一致するかどうかはZFCで決定できないことを証明した。また、単調正規空間 X と、非孤立点を1つしか含まない空間 Y の積空間 $X \times Y$ で正規かつ $e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ となるものが存在するかどうかはZFCで決定できないことを証明した。ここで、 $e(X)$ は空間 X の閉離散部分集合の基数の上限である。

一般順序空間の辞書式順序積について家本氏と共同研究を行い、パラコンパクト性の特徴づけやweightの計算を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本課題は位相空間論と集合論の中間領域の研究である。これまでも集合論の専門家によって位相空間論の研究は行われてきたが、集合論的な興味に傾きがちになることが多いそれらの研究と比して、本研究は位相空間論側に軸足を置きながら、現代集合論のツールを積極的に使っているという点の特徴である。

位相空間論において、 C^* -埋め込みやextentは基礎的な概念であり、その様態を明らかにすることは意義があるが、命題の意味そのものは容易でありながら、通常の集合論の公理系ZFCだけでは真偽を決定できないような例を提供できたことは、特定の分野に限らず数学一般にとっても一定の意義があるものであろう。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to investigate topological properties of products of monotonically normal spaces. By joint study with Y. Yajima, we proved that it is undecidable by only ZFC whether C^* -embeddings coincide with C -embeddings in the product of 1-many copies of the countable discrete space N . We also proved that it is undecidable by only ZFC whether there are a monotonically normal space X and a space Y which has at most one non-isolated point such that $X \times Y$ is normal and $e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$, where $e(X)$ denotes the supremum of the cardinalities of closed discrete subsets of a space X .

By joint study with N. Kemoto, we characterized the paracompactness and calculated the weight of lexicographic products of generalized ordered spaces.

研究分野：集合論的位相空間論

キーワード：単調正規空間 C^* -, C -, P -埋め込み extent 一般順序空間 辞書式順序積

1. 研究開始当初の背景

単調正規空間は距離空間と一般順序空間の概念の共通の一般化である。1992年に Balogh-Rudin によって発表された強力な定理によって正則非可算基数の定常集合と同相な閉集合が、単調正規空間の性質を決定づけるのに重要な役割を果たすことが明らかになった。2010年代になると、矢島氏は Balogh-Rudin の定理を使って、「単調正規空間とコンパクト空間の積空間がオーソコンパクトならば正規である」という予想外の関係があることを明らかにした。その後、研究代表者もこの分野の研究に参加をはじめ、2014年に家本氏と矢島氏との共著論文を発表した。そこでは、単調正規空間と DC-like 空間等の特殊な空間との積のオーソコンパクト性、正規性等を、空間の各点をもつ近傍フィルターの性質に帰着させた。

空間 X の部分集合 E から閉区間 $[0, 1]$ 、実数直線 R 、一般のバナッハ空間 M への任意の連続関数が X 上の連続関数に拡張できる時、 E は X においてそれぞれ C^* -, C -, P -埋め込みであるという。一般に P -埋め込み C -埋め込み C^* -埋め込みという関係が成り立つ。その逆はどうか、という問題は、距離空間をファクターにもつ積空間については日本を中心に長い間研究されてきた。研究代表者と矢島氏は、2017年に「順序数の部分空間 A, B の積 $A \times B$ の閉集合について、それが C^* -埋め込みならば P -埋め込みである」という定理を証明した。その後も引き続き C^* -, C -, P -埋め込みについて共同研究を続けており、本研究課題の申請時には可算離散空間 N の無限積空間の部分集合についての C^* -, C -, P -埋め込みを調べていた。

2. 研究の目的

単調正規空間の積空間の性質を、位相空間論と集合論の両面からのアプローチで解明することが本研究の大きな目的である。より具体的には当初、研究課題名にもあるように特に C^* -, C -, P -埋め込みについて調べることを念頭に置いていたが、研究を進めていくなかで、「extent の等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つのはどんなときか」という問題に行き着いた。この extent も C^* -埋め込みなどと同様、位相空間論における素朴な基礎概念の1つであり、その様態の解明は意義のあるものである。extent の等式の問題に関しては思いのほか深みのある結果が得られそうな感触があり、より研究の進展が望めそうだった。そこで、研究対象を C^* -, C -, P -埋め込みだけに限定せず、単調正規空間の積空間に関する事全般に広げることにして、特に extent についての研究を進めることにした。また、一般順序空間は単調正規空間の特殊なものであるが、その辞書式順序積の性質を解明することも研究の目的の一つに含めることにした。

3. 研究の方法

C^* -, C -, P -埋め込みと extent に関しては位相空間の被覆性質の専門家であり、単調正規空間の積の研究でも実績のある神奈川大学の矢島幸信氏と共同で継続的に研究を行った。また、一部の結果については集合論の専門家である早稲田大学の薄葉季路氏にも共同研究に参加してもらった。研究成果として、位相空間に関する性質で ZFC で真偽を決定できない命題をいくつか見つけることができたが、それらの結果は連続体仮説や公理 \diamond 、弱い分割の性質など、集合論で ZFC と独立であることが知られている命題に帰着させることで得ることができた。単調正規空間の分析には Balogh-Rudin の定理を応用することが有用であるが、2014年の家本氏、矢島氏との共著論文のときに出てきた近傍フィルターの性質と関連づける手法が役に立った。

辞書式順序積については大分大学の家本宣幸氏と共同で研究を行った。線形順序空間の辞書式順序積は昔からある概念であるが、最近、これを一般順序空間について一般化したのが家本氏である。まずは基本的な被覆性質として、paracompact になる条件から考察した。定常集合と同相な閉集合のありえるパターンを網羅することで特徴づけを得ることができた。

4. 研究成果

(1) すべての点が孤立点である空間を離散空間という。非孤立点を高々1つしか持たない空間のことはほとんど離散空間とよぶことにする。このような空間は単調正規空間の中でも最も単純な構造をしているが、これらの積空間の性質は意外にも複雑な様相を呈することがある。

N を可算無限離散空間とする。その無限積空間 N^{κ} における C^* -, C -, P -埋め込みについて矢島氏と共同研究を行った結果をまとめた論文[8]と[5]が2020年に出版された。論文[5]では N^{ω_1} における任意の部分集合について、それが C -埋め込みならば P -埋め込みである。

- ・連続体仮説の否定 + マーチンの公理を仮定すると、 N^{ω_1} における任意の部分集合について、それが C^* -埋め込みならば C -埋め込みである。

ということを証明した。一方、 $N^{2^{\omega}}$ においては、 C^* -埋め込みであるが C -埋め込みではない可算閉離散集合が存在するということが2014年に PoI 夫妻により証明されている。これらのことから、「 N^{ω_1} において C^* -埋め込みであるが C -埋め込みではないような部分集合があるかどうか」は、ZFC だけでは決定できないことが明らかになった。また、論文[8]では次のことを証明した。

- ・基数 κ が非可算な cofinality をもつならば、 N^{κ} においては、 κ 個の点をもつ離散部分集合で C^* -埋め込みになっているものは存在しない。

- ・ $N^{2^{\omega}}$ において非可算個の点をもつ(閉)離散部分集合で C^* -(C -)埋め込みになっているものが存在するためには、 $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$ が成り立つことが必要十分である。

このことから、「 $N^{2^{\omega}}$ において、非可算個の点をもつ離散部分集合で C^* -埋め込みになっているものが存在するかどうか」は、ZFC だけでは決定できないことが明らかになった。

(2) 同年に出版された論文[6]もまた矢島氏との共同研究によるものである。そこでは、順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ について、次の各条件が同値であることを示した。

- ・ $A \times B$ は可算パラコンパクトである。

- ・任意の正則非可算基数 κ と閉長方形 $A' \times B'$ $A \times B$ について、 κ 個の点からなる閉離散部分集合が A' と B' のどちらにも存在しないならば、 $A' \times B'$ にも存在しない。

- ・任意の正則非可算基数 κ と、 C^* -埋め込みになっている任意の長方形 $A' \times B'$ $A \times B$ について、 κ 個の点からなる閉離散部分集合が A' と B' のどちらにも存在しないならば、 $A' \times B'$ にも存在しない。

特に、弱到達不可能基数が存在しないような ZFC のモデルにおいては、 $A \times B$ の可算パラコンパクト性が、「extent の等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が $A \times B$ の任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して成り立つ」という条件によって特徴づけられることがわかった。

この結果が得られたことが契機となって、研究の対象が C^* -, C -, P -埋め込みから、extent の等式の問題、「どんな空間 X, Y に対して $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか?」に移っていった。空間 X の extent $e(X)$ とは、 X の閉離散部分集合の基数の上限のことである。(ただし、 $|X|$ が有限の場合は便宜上 $e(X) = |X|$ とする)。両方のファクターが距離空間の場合や片方のファクターがコンパクトの場合は積 $X \times Y$ の extent の等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つこと、Sorgenfrey

直線 S は Lindelöf 空間であるが、 $e(S \times S) = 2^{\omega} > e(S) \cdot e(S)$ であり extent の等式が成り立たないこと、などは以前よりよく知られている。1978年に Shelah は「Lindelöf 空間 X, Y で $e(X \times Y) > 2^{\omega}$ であるものが存在するか」を問い、そのような X, Y の存在が ZFC と無矛盾であることを示した。2010年代には、空間 X, Y に更なる条件を加えて同様の積の存在の無矛盾性を薄葉氏が証明しているが、ZFC での解決は現在も得られていない。

(3) extent の等式の問題を矢島氏と共同研究し、その結果をまとめた論文[3]が2022年に出版された。そこでは、次のことを証明した。

- ・単調正規空間 X について、「任意のほとんど離散な空間 Y に対して $e(X \times Y) = e(X) \times e(Y)$ が成り立つ」ための必要十分条件は、「 $e(X)$ 以上のどの基数 κ についても、 X には κ^+ の定常集合と同相な閉集合が存在しない」ことである。
- ・一般の空間 X と DC-like 空間 Y について、 $X \times Y$ が正規かつ長方形的であるならば、extent の等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

ここで、 κ^+ は κ より大きい最小の基数である。DC-like 空間は Telgárski によって導入・研究された位相ゲームを使って定義される概念で、コンパクト空間とほとんど離散な空間の共通の一般化になっている。

extent の等式が成り立たない場合は $e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ であるが、左辺を右辺からどれくらい離せるかという問題を考えることができる。上記の Lindelöf 空間の積の extent に関する Shelah の問いもこのタイプの問題である。論文[3]では、次のような組み合わせについては、任意の非可算基数 κ に対して $e(X \times Y) = \kappa > e(X) \cdot e(Y)$ となる空間 X, Y をとれることを明らかにしている。尚、3つ目の例は静岡大学の 大田春外氏が発見したものである。

- ・可算コンパクトな X とほとんど離散な Y
- ・ ω_1 の Lindelöf な部分空間 X と可算コンパクトな部分空間 Y
- ・ Tychonoff space X, Y で $X \times Y$ が長方形的

一方で、単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間では、 $e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ はありえるが、左辺は右辺よりそれほど大きくはならず、かならず $e(X \times Y) \leq e(X) \cdot (e(Y))^+$ であることを証明した。この証明も論文[3]に載っている。

(4) 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積 $X \times Y$ で、extent の等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立たない例があること、正規かつ長方形的な場合はかならず成り立つこと、が(3)の研究でわかった。そこで、研究代表者と矢島氏は、このような X, Y で、 $X \times Y$ が(長方形的であることは仮定せず)正規であることだけ仮定した場合に extent の等式はどうなるのかを考えた。その結果、 X がオーソコンパクトな場合や、 $e(X) = e(Y)$ の場合については extent の等式が成り立つことを証明することができた。一方、「 $e(X) = e(Y) = \omega_1$ の場合に extent の等式が常に成り立つ」という命題が、 ω_1 上でのある弱い version の分割の性質と同値であることを証明した。その分割の性質に関する Todorčević の定理から、この命題は ZFC 上では決定不可能であることが判明した。この結果は論文[1]として出版された(報告書を書いている時点ではオンライン出版)。

(5) 距離空間の一般化について、次のような関係が知られている。

- ・距離空間 developable 空間 完全 p 空間 p 空間
- ・距離空間 Lasnev 空間 M_1 空間 M_3 空間 強 空間 空間 強 空間 空間
- ・距離空間 層型空間 半層型空間

更に、完全 p 空間、強 p 空間、半層型空間の共通の一般化として、強 p 空間という概念がある。

無限積空間 $X = \prod_{i \in I} X_i$ において base point と呼ばれる 1 点 b を固定したうえで、可算個の座標を除いて b と同じ値をもつ点だけをすべて集めてできる X の部分集合 \mathcal{F} を \mathcal{F} -積とよぶ。これは有限積と無限積の中間的な位置づけにある積空間である。一般化された距離空間の \mathcal{F} -積における extent の等式について、研究代表者、矢島氏と薄葉氏は共同研究を行った。その結果をまとめた論文[2]が 2022 年に出版された。そこでは「各ファクター X_i が完全 p 空間か、強 p 空間の場合には、 \mathcal{F} -積において extent の等式 $e(\prod_{i \in I} X_i) = \sup\{e(X_i) : i \in I\}$ が成り立つ」こと、また、「各ファクター X_i が強 p 空間で、任意の有限部分積が perfectかつ submetalindelöf の場合(特に各ファクター X_i が半層型な場合)も等式 $e(\prod_{i \in I} X_i) = \sup\{e(X_i) : i \in I\}$ が成り立つ」ことを証明した。一般化された距離空間の積空間の研究は矢島氏の得意とするところで、これらの研究結果の多くの部分は矢島氏の力量によるところが大きい。

一方、公理 \diamond を仮定すると、「extent の不等式 $e(X \times Y) = \max\{e(X), e(Y)\}$ が成り立つような局所コンパクト空間 X, Y が存在する」ことを薄葉氏が証明した。局所コンパクト空間は p 空間であるから、上記の完全 p 空間の \mathcal{F} -積についての結果は仮定を p 空間に弱めることができない。

(6) 一般順序空間は単調正規空間の特殊なものである。家本氏との共同研究で、一般順序空間の辞書式順序積がパラコンパクトになるための必要十分条件を得た。また、辞書式順序積の weight を計算した。これらの結果は論文[7]と[4]として 2020 年に出版された。

(7) 「1. 研究開始当初の背景」のところに書いた順序数の部分空間 A, B の積についての $C^* = P$ の定理であるが、仮定の「閉集合」を「一般の部分集合」に変えても成り立つことが、家本氏と大田氏との共同研究で明らかになった。この結果についての論文は、この報告書を書いている時点では査読中でありまだ掲載が決まっていない。

<引用文献>

- [1] Y. Hirata and Y. Yajima, Undecidability for the extent of products of a monotonically normal space and a special factor, *Topology and its Appl.* 315 (2022), 108157.
- [2] Y. Hirata, T. Usuba and Y. Yajima, Equalities for the extent of infinite products and \mathcal{F} -products, *Topology and its Appl.* 307 (2022), 107946.
- [3] Y. Hirata and Y. Yajima, Inequality and equality for the extent of products with a special factor, *Topology Proc.* 59 (2022), 223-241.
- [4] Y. Hirata and N. Kemoto, The weight of lexicographic products, *Topology and its Appl.* 284 (2020), 107357.
- [5] Y. Hirata and Y. Yajima, C^* -, C - and P -embedded subsets in products and the undecidability of a certain property on N^{ω_1} , *Topology and its Appl.* 283 (2020), 107350.
- [6] Y. Hirata and Y. Yajima, A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals, *Topology and its Appl.* 282 (2020), 107325.
- [7] Y. Hirata and N. Kemoto, A characterization of paracompactness of lexicographic products, *Topology Proc.* 56 (2020), 219-236.
- [8] Y. Hirata and Y. Yajima, Undecidability of the cardinality of C^* -embedded discrete subsets in products of natural numbers, *Topology Proc.* 56 (2020), 85-95.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	4. 巻 315
2. 論文標題 Undecidability for the extent of products of a monotonically normal space and a special factor	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 108157 (全22ページ)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2022.108157	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Hirata, Toshimichi Usuba and Yukinobu Yajima	4. 巻 307
2. 論文標題 Equalities for the extent of infinite products and ω -products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107946 (全12ページ)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2021.107946	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	4. 巻 59
2. 論文標題 Inequality and equality for the extent of products with a special factor	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology Proceedings	6. 最初と最後の頁 223-241
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	4. 巻 282
2. 論文標題 A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107325 (全10ページ)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107325	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	4. 巻 283
2. 論文標題 C*- , C- and P-embedded subsets in products and the undecidability of a certain property on $N^{\{ _1 \}}$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107350 (全16ページ)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107350	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto	4. 巻 284
2. 論文標題 The weight of lexicographic products	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107357 (全13ページ)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107357	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	4. 巻 56
2. 論文標題 Undecidability of the cardinality of C*-embedded discrete subsets in products of natural numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Proceedings	6. 最初と最後の頁 85-91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto	4. 巻 56
2. 論文標題 A characterization of paracompactness of lexicographic products	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Proceedings	6. 最初と最後の頁 219-236
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計5件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 平田康史, 矢島幸信
2. 発表標題 Undecidability for the extent of products of monotonically normal spaces
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasushi Hirata (Joint work with Yukinobu Yajima)
2. 発表標題 On the extent of products of monotonically normal spaces
3. 学会等名 RIMS研究集会 (実数の集合論における近年の進展)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平田康史, 矢島幸信
2. 発表標題 単調正規空間と特殊な空間の積のextentについて
3. 学会等名 RIMS研究集会 (一般位相幾何学の動向と諸分野との連携)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平田 康史, 矢島 幸信
2. 発表標題 順序数の積空間の閉長方形の C^* -埋め込み性
3. 学会等名 RIMS研究集会 (一般位相幾何学の発展と諸分野との連携)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平田康史・家本宣幸
2. 発表標題 辞書式順序積の類似性と相違性
3. 学会等名 2019年度ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関