様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月２１日現在

機関番号：３２７０６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３６０７

研究課題名（和文）弦の交差に起因する組合せ問題の研究

研究課題名（英文）A study of combinatorial problems caused by the crossing of chords

研究代表者
中上川　友樹（Nakamigawa, Tomoki）

湘南工科大学・情報学部・教授

研究者番号：２０３８６８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,000,000円

研究成果の概要（和文）：コードダイアグラムとは，端点を共有しない弦の集合である．本研究では，与えられたコードダイアグラムEについて，それに含まれる弦の交差を解きほぐして新たな２つコードダイアグラムを生成する操作に注目した．この交差の展開操作を次々と繰り返すと，最終的には交差のないコードダイアグラムまで展開し尽くすことができる．このようにして得られる非交差コードダイアグラムの重複集合NCD(E)は展開の順序によらずに一意的に決まる．本研究では，組合せ論の観点からNCD(E)の性質を詳しく調べた．特にその位数が他の組合せ構造である，ある種のヤング図形や増大木の個数と一致することを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の学術的意義は，平面上の１つの円における複数の弦の配置、という古代より人類が親しんできた対象について新たな知見を付け加えたことである．この弦の配置について交差の展開操作を繰り返して施すことにより結果的にそれぞれの配置が交差を含まない配置にまで還元される．それに関連する数え上げ問題において、他の重要な組み合わせ的な構造、交代置換、増大木、および0-1ヤング図形など、と密接な関連があることが明らかになった．今後の方向としては、単に数え上げ問題だけでなく弦の配置の構造と他の組合せ構造との間の1対1対応を示すことができれば、さらに弦の配置の研究の重要性を補強することになると思われる．

研究成果の概要（英文）：A chord diagram is a set of chords having no common endpoints. In this study, we focus on chord expansion, the operation of generating two new chord diagrams for a given chord diagram E by resolving the crossings of the chords contained in the diagram.
This operation is repeated one after the other until finally chord diagrams with no crossings are generated. The resulting multiset of nonintersecting code diagrams, NCD(E), is uniquely determined regardless of the order of the chord expansion. In this study, the properties of NCD(E) are investigated in detail from a combinatorial viewpoint. In particular, we show that the cardinality of NCD(E) coincides with that of other combinatorial structures, such as certain Young diagrams and increasing trees.

研究分野：離散数学

キーワード：コードダイアグラム　三角形分割　ヤング図形　増大木　幾何グラフ

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

円の内部で交わる２本の弦を交差という．互いに交差する n 本の弦の集合を n-交差という．本研究の目的は，与えられた交差条件を満たす弦の集合に関して，以下の問題を明らかにすることである． (1) 条件を満たす弦の集合の構造を組合せ論の手法により解明すること（特徴付け問題）．(2) 条件を満たす弦の集合の個数を求めること（数え上げ問題）．(3) 条件を満たす弦の集合の位数（その集合に含まれる弦の本数）の最大値または最小値を求めること（極値問題）．本研究の対象―弦とその交差―は，古来より初等的な平面幾何学で扱われてきたものであるが，近年の研究により，その深く豊かな代数的構造が明らかにされつつある．本研究の意義は，一見素朴に見える対象を組合せ論的な視点からとらえ直すことにより，それが数学のさまざまな分野に結びつく基本的な構造であることを示すことにある．従来から広く知られてきた対象に新たな角度から光を当ててその隠された価値を見出だすことが，本研究のなし得る学術的貢献である．

２．研究の目的

本研究の目的は，様々な興味深い性質が知られている「弦の交差の展開」について，組合せ論の立場から未知の性質を解明し，その本質に迫ることである．円とその弦は，古代より最も親しまれている幾何学的対象の一つであるが，次節に示すような様々な性質はいずれも最近になって初めて明らかにされたものである．本研究課題は，よく知られた単純なものの中に隠されている奥深いものを新たに発見し新たな研究対象を見出していく，という性格を持っている．

３．研究の方法

弦の交差に起因する組合せ問題のうち，現時点で本研究において特に重視する研究対象は「弦の交差の展開」である．これについて，基本的な定義と既知の結果を紹介する．

弦の集合について，どの２つの弦もその端点を共有しないとき，その集合をコードダイアグラムと呼ぶ．また，2-交差を含まないコードダイアグラムを非交差と呼ぶ．コードダイアグラム E が 2-交差{xz，yw} を含むとする．このとき， E の S についての展開とは，E を新たな２つのコードダイアグラム E1 = (E-S)∪{xw，yz} と E2 = (E-S)∪{xy，zw} に置き換えることである（図 1）．

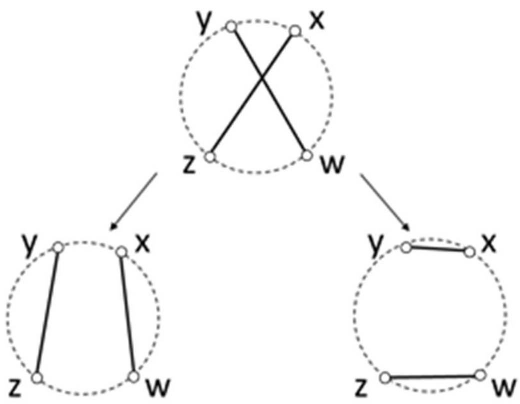

図 1.　コードダイアグラムの展開

E の展開により E' が生じるとき，E' に含まれる 2-交差の数は，E のそれよりも真に小さくなる．よって，あるコードダイアグラム E から出発し，次々と展開を繰り返すことにより，非交差コードダイアグラムまで展開し尽くすことができる．このとき，最終的に生成される非交差コードダイアグラム全体の重複集合は，展開の仕方に依らず E のみで決まることが示せるので，それを NCD(E) と書く． NCD(E) の位数を E の展開数と呼び，以下，f(E) で表わす．コードダイアグラムの展開数に関連する既知の結果を以下に示す．互いに交差する n 本の弦を n-交差と呼ぶ．

(1) n-交差の展開数は，次数 n+1 の交代置換の個数と等しい．なお，交代置換の個数はオイラー数と呼ばれている[Nak16].

(2) E をコードダイアグラムとするとき，f(E) = T(GE;2,-1) が成り立つ．ここで，GE は E のインターレースグラフ（サークルグラフとも呼ぶ）であり，T(G;x,y) はグラフ G の Tutte 多項式　である[NS18].

与えられたコードダイアグラムを展開し尽したときの非交差コードダイアグラムの位数につ

いては従来研究において明らかにしたところである．しかしながら，個々のコードダイアグラムの重複度については，ごく基本的な事実しか明らかになっていない．本研究では，非交差コードダイアグラムの分布を解明することを目指す．

また、従来研究では，交差の展開はコードダイアグラムに対してのみ定義されている．コードダイアグラムは，「凸多角形の頂点を頂点集合とする各頂点の次数が１である幾何グラフ」とも書き表せる．ここでの次数制限を取り去り，「凸多角形の頂点を頂点集合とする幾何グラフ」に対しても交差の展開を定義することができる．本研究では，交差の展開の適用対象を拡張した場合の結果を得ることを目指す．

４．研究成果

当初の研究計画では，大別して２つのテーマを想定していた．「一般三角形分割」と「弦の交差の展開」である．このうち，主に弦の交差の展開に関する研究を進めた．本研究期間での研究成果を以下に述べる．

(1) 非交差コードダイアグラムの重複集合における重複度

与えられたコードダイアグラム E と非交差コードダイアグラム F に対して，F の非交差コードダイアグラム重複集合 NCD(E) における重複度 m(E,F)を調べた．m(E,F) は E を展開したときに生成される F の個数である．n-交差を Cn と書く．非交差コードダイアグラム F の弦 e について，e の少なくとも一方の側に他の F の弦が存在しないとき，e を耳という．すべての弦が耳であるような位数 n のコードダイアグラムを n-ネックレスと呼び，Nn と書く（図２)．

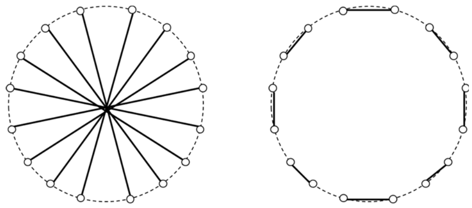

図２. n=8 の場合の n-交差（左）と n-ネックレス（右）

定理．数列 m(Cn, Nn) は，n が奇数のとき Genocchi 数，n が偶数のとき median Genocchi 数に一致する[Nak20].
ここで，Genocchi 数および median Genocchi 数はよく知られている数列であり，ある種の置換の個数を表すことが知られている．

(2) 弦の展開操作とトレミー重み

トレミー重みを導入する．各弦 e に対して，重み w(e)が与えられているとする．円周上にこの順に並んでいる任意の４点 a，b，c，d について，交差関係式

$$w(ac)w(bd) = w(ab)w(cd) + w(ad)w(bc)$$

が成り立つならば，w をトレミー重みと呼ぶ．本研究では，トレミー重みを利用して NCD(E)を研究し，次の結果が得られた．

① 展開の単射性：与えられたコードダイアグラム E に対して，E から展開される非交差コードダイアグラムの重複集合 NCD(E)は一意に定まるが，この対応は単射である．

② m(E,Nn)とある均衡２部グラフの完全マッチングの個数との対応：一般のコードダイアグラム E に対して m(E,Nn)は，対応する均衡２部グラフの完全マッチングの個数と等しい．

③ m(E,F)と三角形分割に付随するトレミー重みとの関係：T は三角形分割とし，wT を T に付随するトレミー重みとする．コードダイアグラム E と非交差コードダイアグラム F について，F⊂E(T)ならば，m(E,F)はローラン多項式 wT(E)に含まれる単項式 wT(F)の係数に一致する．

(3) 弦の展開操作の幾何グラフへの拡張

円周上の有限個の点集合 V を頂点集合とし，それらを両端点とする弦の集合 E を辺集合とするグラフを幾何グラフ G＝(V,E)という．なお，本研究における幾何グラフの定義としては多重辺は認めるがループは認めない．与えられた幾何グラフ G を出発点として弦の展開操作を可能な限り繰り返して行うと G のみによって決まる非交差幾何グラフの重複集合が一意に定まる．この重複集合の位数を G の展開数と呼ぶ．また G から生成される非交差幾何グラフ H の個数を(G,H)の重複度という．各頂点の次数が１である幾何グラフをコードダイアグラムという．コードダイアグラムの弦展開の性質については既に研究が進められていた．特にコードダイアグラムの展開数はコードダイアグラムから自然に得られる交差グラフについての Tutte 多項式の具体的な値と対応することが知られている．一方，一般の幾何グラフは交差グラフとの直接の対応は無いため，コードダイアグラムにおいて得られた展開数についての公式は得られない．そこで与えられた幾何グラフ G についてその次数２以上の頂点を次数に等しい個数の新たな頂点に置き換えることによりコードダイアグラム G(E)を構成し G と G(E)の展開数，重複度との関係を調べた．特に，幾何グラフの重複度は，コードダイアグラムの重複度の場合と同様に，三角形分割

に付随するローラン多項式の係数で表されることがわかった.

(4) 細分された辺を持つ凸多角形の三角形分割の数え上げ
各 1≦i≦s について, 凸 s 角形の i 番目の辺を n_i 個の点により細分する. P の頂点集合 V と内分点の集合 W について, V∪W の点を端点とする対角線により P の内部を三角形領域に分割することを P の三角形分割と呼ぶ. P の三角形分割全体の個数を f(s;n_1,n_2,⋯,n_s) と定義する. 本研究では f の s 変数母関数 F を決定した.

(5) コードダイアグラムの展開と偶奇増大木に関する数え上げ
以下では I={1,⋯,n-1}の分割 I=I0∪I1∪L を考える.
① 0-1 ヤング図形とは, 各箱が 0 または 1 を含むヤング図形である. 整数の分割 a=(n-1,⋯,1) に対応する階段状ヤング図形を考える. 先述の分割 I=I0∪I1∪L について, タイプ(I0,I1.L)の階段状 0-1 ヤング図形とは, i∈I0 ならば第 i 行は偶数個の 1 を含み, i∈I1 ならば第 i 行は奇数個の 1 を含み, i∈L ならば第 i 行は 1 を含まない, を満たすものである (図 3, 右).
② n+1 個の頂点を持つ増大木 T とは、頂点集合が{0,1,⋯,n}であり, T の各有向辺(i,j)が 0≦i<j≦n を満たすものである. 増大木 T の頂点 i について, i から出ている有効辺の本数を i の次数という. 先述の分割 I=I0∪I1∪L について, タイプ(I0,I1.L)の偶奇増大木とは, i∈I0 ならば i の次数が偶数, i∈I1 ならば i の次数が奇数, i∈L ならば i は葉, を満たすものである (図 3, 左).

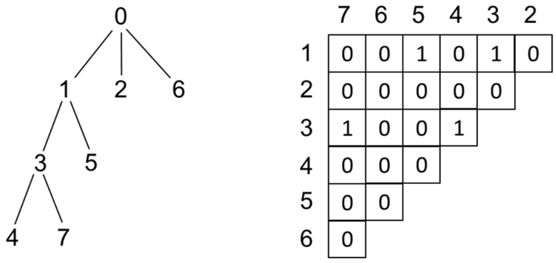

図 3. 偶奇増大木 (左) と階段状 0-1 ヤング図形 (右)

先述の分割 I=I0∪I1∪L について, n-1 本の弦を持つコードダイアグラム E(I0,I1.L)を具体的に構成することができて, 次の定理が成り立つことがわかった.
定理. 与えられた自然数 n, 分割 I=I0∪I1∪L について, 次の 3 つの数値は互いに等しい [Nak23].
(a) タイプ(I0,I1.L)の階段状 0-1 ヤング図形の個数
(b) タイプ(I0,I1.L)の偶奇増大木の個数
(c) コードダイアグラム E(I0,I1.L)の展開数

参考文献

[Nak16] T. Nakamigawa, Expansions of a chord diagram and alternating permutations, Electronic J. Combin. 23, #P1.7(2016).
[NS18] T. Nakamigawa, T. Sakuma, The expansion of a chord diagram and the Tutte polynomial, Discrete Math. 341, 1573-1581(2018).
[Nak20] T. Nakamigawa, The expansion of a chord diagram and the Genocchi numbers, Ars Mathematica Contemporanea 18, 381-391(2020).
[Nak23] T. Nakamigawa, A Correspondence between Chord Diagrams and Families of 0-1 Young Diagrams, arXiv preprint, arXiv:2311.17312. 2023.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Tomoki Nakamigawa	４．巻 -
２．論文標題 A Correspondence between Chord Diagrams and Families of 0-1 Young Diagrams	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Math arXiv	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.48550/arXiv.2311.17312	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tomoki Nakamigawa	４．巻 18
２．論文標題 The expansion of a chord diagram and the Genocchi numbers	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Ars Mathematica Contemporanea	６．最初と最後の頁 381-391
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.26493/1855-3974.2239.7f1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　0件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 Tomoki Nakamigawa
２．発表標題 Even-odd Increasing Trees and Expansion of a Chord Diagram
３．学会等名 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 中上川　友樹
２．発表標題 細分された辺を持つ凸多角形の三角形分割の数え上げ
３．学会等名 応用数学合同研究集会
４．発表年 2022年

１．発表者名 Tomoki Nakamigawa
２．発表標題 On the Multiplicity of a Nonintersecting Chord Diagram Generated by Chord Expansions
３．学会等名 28th British Combinatorial Conference（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 中上川　友樹
２．発表標題 幾何グラフの展開と0-1ヤング図形
３．学会等名 応用数学合同研究集会
４．発表年 2021年

１．発表者名 中上川　友樹
２．発表標題 コードダイアグラムの展開とトレミー重み
３．学会等名 応用数学合同研究集会
４．発表年 2020年

１．発表者名 Tomoki Nakamigawa
２．発表標題 The Expansion of a Chord Diagram and the Genocchi Numbers
３．学会等名 27th British Combinatorial Conference（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 中上川　友樹
２．発表標題 n-交差の展開により生成される非交差コードダイアグラムの分布について
３．学会等名 応用数学合同研究集会
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

湘南工科大学　情報学科　研究室　中上川友樹研究室 https://www.shonan-it.ac.jp/faculties/informatics/laboratory/t-nakamigawa/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関