

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03626

研究課題名(和文)自己駆動粒子系におけるビリヤード問題の研究

研究課題名(英文)A billiard problem arising from self-propelling particles

研究代表者

宮路 智行(Miyaji, Tomoyuki)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20613342

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：領域内部で漸近的に等速直線運動し、領域境界と反発的に相互作用する単一の自己駆動粒子のビリヤード的運動を研究した。着目する現象の時空間スケールに応じて偏微分方程式モデル、常微分方程式モデル、離散時間力学系モデルの三種類の数理モデルに対する数理解析・数値実験を行った。出版された成果は常微分方程式モデルにおける粒子の反射に関するものである。入射角より反射角の方が大きくなることをある仮定の下で証明した。数値実験結果によれば、この仮定は緩められることが示唆されるが、証明には困難が残る。また、粒子の運動が非常に遅い極限において、詳細な数値実験によって、入射角と反射角の関数関係の具体形についての予想を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は水面に浮かぶ樟脳円板の運動を主な動機付けとしてきたが、入射角と反射角の関係に関して得られた成果は、偏微分方程式モデルから分岐理論による縮約方程式として導かれたモデルの研究を通して得たものである。そのため、特定の方程式や系にとどまらず、同様の振る舞いを示す別の系においても同様のことが成り立つ普遍性があると予想する。我々の提出した予想を数学的に証明する試みが、自己駆動粒子の数理モデルに対する数理解析をさらに促進することを期待する。

研究成果の概要(英文)：We studied the billiard-like motion of a single self-propelled particle that is asymptotically in constant velocity linear motion inside a domain and interacts repulsively with the boundary. We have conducted mathematical and numerical analyses on three different mathematical models: partial differential equation models, ordinary differential equation models, and discrete-time dynamical system models. The published results concern the reflection of particles in the ordinary differential equation model. We have proved under certain assumptions that the angle of reflection is greater than that of incidence. Numerical results suggest that this assumption can be relaxed, but the proof remains difficult. In addition, we have carried out detailed numerical experiments and have obtained a conjecture about the specific form of the functional relationship between the angle of incidence and that of reflection in the limit of very slow particle motion.

研究分野：非線型解析

キーワード：自己駆動粒子 数理モデリング ビリヤード問題 力学系 微分方程式 数値シミュレーション

1. 研究開始当初の背景

数学的ビリヤード問題(撞球問題)は力学系の理論と応用で重要な位置を占めてきた。例えば Sinai (Ya.G. Sinai, Russian Math. Surveys 25(1970) pp.137-189)による統計力学のモデルとしての研究及びエルゴード仮説の証明を筆頭に、数学・数理科学の発展に大きく寄与してきた。その研究対象は、等速直線運動と領域境界での完全弾性反射を繰り返す粒子の軌道の性質であった。本研究では、そのような“古典的”な撞球とは異なる、非線形・非平衡系で自己駆動的に運動する剛体円板における撞球問題に焦点をあてた。

円板状に固めた樟脳を水に浮かべると、水面を滑るように動き、直進と反射を繰り返す現象とその数理モデル (X. Chen, S. I. Ei, and M. Mimura, Netw. Heterog. Media 4 (2009) 1-18) を動機付けとして、非完全弾性反射を繰り返す非平衡撞球についての研究を若手研究 B「非線形・非平衡系におけるビリヤード問題の発展～対称性と退化を伴う分岐～」(平成 28 年度～平成 30 年度)で実施した。その発展として本研究が始まった。

自己駆動粒子の研究は互いに相互作用する自己駆動粒子の集団運動に関する研究が大きな潮流であるが、本研究課題では一つの自己駆動粒子が境界との相互作用により生ずる運動に注目した。樟脳円板以外の系でも非平衡撞球的な運動が観察されており、例えば円板状のシャーレ内を動き回る油滴 (S. Tanaka et al., Phys. Rev. E 91 (2015), 032406), 非線形光共振器における cavity soliton の数理モデルにおけるスポット解の反射運動 (F. Prati et al., Phys. Rev. A 84 (2011), 053852)などがある。

2. 研究の目的

本研究は、反射規則という局所的な性質と軌道という大域的なパターンとの関係に焦点をあて、非平衡ビリヤード球の運動ではどのような軌道がありえるのか、あるいはありえないのか数理的に理解することを目的とした。上述の樟脳円板以外の非平衡撞球の数理モデルを直接研究対象とはしなかったが、本研究課題は樟脳円板の運動のみを研究することを意図したわけではなく、これらにも通用する普遍性を目指した。

3. 研究の方法

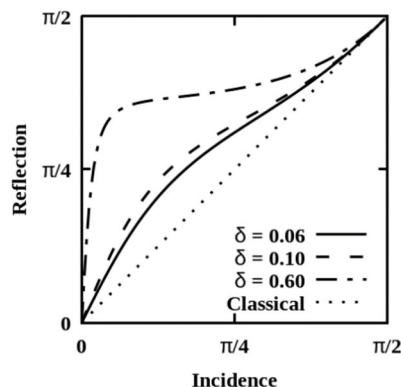
三つの異なる階層で数理モデルを用いた。樟脳円板が駆動されるメカニズムの記述に基づく偏微分方程式モデル (Chen-Ei-Mimura の移動境界モデル: 反応拡散方程式と常微分方程式の連立系)、縮約方程式として得られる常微分方程式モデル(粒子モデル: 4次元の常微分方程式系)、反射規則が予め与えられたとして、領域内部では直進、境界に衝突すると仮定して反射規則を参照する離散力学系モデル (M. Mimura, T. Miyaji, I. Ohnishi, Hiroshima Math. J. 37 (2007) pp. 343-384, およびその参考文献)である。

- (1) 移動境界モデルに対しては、当初は有限要素法によるシミュレーションを試みていた。その後、擬スペクトル法による数値実験に切り替え、これによって矩形領域のアスペクト比に依存したアトラクタの遷移を観察した。ただし、いずれの手法においても、時間大域的な漸近挙動を議論できるほどの高精度を達成できておらず、その点においては課題が残る。

- (2) 右図のように、入射角 (Incidence) と反射角 (Reflection) には関数関係があり、入射角より反射角が大きくなることが予想される (ここで、角度は境界の法線から測る)。反射規則を理解するため、反射壁が一つである場合の粒子モデルに対する数学解析および数値実験を行った。

- (ア) 数学解析は力学系の観点から相空間解析による。時間負の無限大で遠方で等速直線運動している状態から反射壁へ向かって入射して反射し、時間正の無限大で再び遠方で等速直線運動するような解を系の変数変換によってヘテロクリニック解としてとらえ、その存在性を示すことに加え、入射角と反射角の大小という定性的な性質の導出に挑んだ。

- (イ) 数学的に厳密ではないが、粒子の運動が非常にゆっくりである極限 (slow speed limit) において、ハミルトン系によって形式的に系を近似し、そこから反射規則についての定量的な情報の抽出を試みた。これによって得られた反射規則の関数関係についての予想が妥当であるか検討するため、多倍長浮動小数点演算を援用した数



値計算による数値実験を行った。

- (3) 正方形領域における粒子モデルにおける平衡点の分岐解析を行った。正方形の対称性をもつことから、二面体群 D_4 の作用と可換なベクトル場における分岐となるため、群論的分岐理論を援用した。
- (4) 正方形領域または矩形領域における離散力学系モデルに対する比較的単純な極限周期軌道（矩形，平行四辺形，8 の字）についてその存在と安定性の条件を検討した。

4. 研究成果

以下の(1)(2)について論文にとりまとめ、発表した。いずれも粒子モデルについての結果である。粒子モデルは移動境界モデルの縮約方程式として導出される。一般の平面上の反応拡散系におけるスポットダイナミクスにおいても同様の縮約が可能である (S. I. Ei et al. *Discret. Contin. Dyn. Syst. S* 14 (2006) 31-62)。樟脳円板や平面上の反応拡散系以外の系であっても、それが進行スポット解の分岐として捉えられるのであれば、相互作用項は系に依存して異なる形になるであろうが、漸近的等速直線運動を与える分岐の標準形の部分は共通すると考えられるため、それらの系へも応用可能な、普遍的な結果であると予想する。ただし、樟脳円板や平面上の反応拡散系以外の系における粒子モデルの導出は、個々のモデルに対する研究が必要であり、課題として残る。

(1) 粒子の反射において入射角より反射角が大きくなること

粒子モデルにおける反射現象を数学的に解析した。パラメータを固定した系に対して一つの反射規則を対応づけるため、入射角と反射角を定義する必要があった。そこで、研究の方法 3.(2)(ア)により、時間負の無限大で遠方で等速直線運動している状態から反射壁へ向かって入射して反射し、時間正の無限大で再び遠方で等速直線運動するような大域解に対して、無限遠方における速度の比をもとに入射角・反射角を定義することとした。このままでは扱いにくいので、無限遠方での等速直線運動が系の平衡点となるように座標変換し、3次元相空間において平衡点同士を結ぶヘテロクリニック解についての問題として捉えなおした。ここでは、反射が生じること（ヘテロクリニック解の存在）にとどまらず、入射角と反射角の大小関係に興味がある。系のパラメータの一つが 0 であるという仮定のもとで、入射角より反射角が大きくなることを証明することができた。この仮定のもとでは角度のダイナミクスが変数分離形となることが鍵となっている。また、粒子モデルにおける反射規則が満たすと考えられる性質をもとに正方形領域における離散力学系モデルの挙動について議論した。この成果については *Discrete & Continuous Dynamical Systems Series S* 誌に発表した (doi:10.3934/dcdss.2020229)。不変多様体のなめらかさから、このパラメータが非零でも十分小さい場合は成立することが示唆される。ただし、数値計算によれば小さくない場合にも成立すると予想され、あくまで技術的な仮定にすぎないと考えている。この仮定を外して一般の場合に証明することは未解決である。一方、離散力学系モデルにおいては、与えられた形状の閉軌道の存在（または非存在）や安定性を示すことはある程度初等的に実行できるが、全体としては位置と角度を変数とする 2次元の離散力学系であり、領域の角において不連続性を持つため、力学系と分岐の観点で一般的に取り扱うには困難が伴うだろう。

(2) 粒子の反射における入射角と反射角の関数関係

粒子モデルに対するもう一つのアプローチとして、研究の方法 3.(2)(イ)による研究成果を *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 誌 (doi:10.1007/s13160-023-00602-w) に発表した。ハミルトン系による粗い近似をもとに、粒子の動きが非常にゆっくりである極限 (slow speed limit) における反射規則の具体的な表示式を得た。この近似は数学的に不正確であり数値的にも精密でない。しかし、モデルのもつ対称性の吟味と多倍長浮動小数点数演算を援用した一連の数値実験により、モデルに依存したあるスケーリングファクターをかけることで、近似が精密となることを見出した。特に、このスケーリングファクターをモデルに含まれるパラメータへの依存性も見出している。Slow speed limit における漸近的な反射規則の表示式を数値実験による予想として発表した。この予想を証明あるいは形式的な議論によって導出するには、上記の粗い近似を正当化しながら進めるのではなく、別のアイデアが必要だと思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Masayasu Mimura, and Tomoyuki Miyaji	4. 巻 0
2. 論文標題 Reflection of a self-propelling rigid disk from a boundary	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - S	6. 最初と最後の頁 0-0
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdss.2020229	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Miyaji Tomoyuki, Sinclair Robert	4. 巻 41
2. 論文標題 Asymptotic reflection of a self-propelled particle from a boundary wall	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 269 ~ 295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-023-00602-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Tomoyuki Miyaji and Robert Sinclair
2. 発表標題 A conjecture on the asymptotic reflection rule of a self-propelled particle
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮路智行
2. 発表標題 樟脳運動の粒子モデルにおける反射規則
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析ミニ研究集会2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮路智行
2. 発表標題 非線形・非平衡系におけるビリヤード問題について
3. 学会等名 第5回東京大学数理情報学談話会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宮路智行
2. 発表標題 A billiard problem of a self-propelling particle
3. 学会等名 第6回理論応用力学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宮路智行
2. 発表標題 非線形非平衡系におけるビリヤード問題について
3. 学会等名 語ろつ「数理解析」セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	SINCLAIR Robert (Sinclair Robert) (50423744)	法政大学・経済学部・客員教授 (32675)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------