

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03631

研究課題名(和文)凸代数幾何を用いた最適化問題の成す多様体の研究

研究課題名(英文)A study of manifolds of optimization problems via convex algebraic geometry

研究代表者

関口 良行 (Sekiguchi, Yoshiyuki)

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：50434890

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：(1)半正定値計画問題の主問題と双対問題が strictly feasibleであることと、斉次化した KKT 条件が非自明解を持つことが同値になることを示した。(2)特異な半正定値計画問題に対して係数行列を摂動した場合に、最適値が連続に変化するための十分条件を求め、Facial Reduction Sequence を用いて、最適値が連続的に変化するような摂動方向を求めた。(3)半代数的凸集合と直線が非横断的に交わる場合に、交互射影法の厳密収束レートのある多項式の重複度を用いて表した。また、交互射影法の挙動が切り替わる境界をイデアルの消去理論を用いて求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

半正定値計画問題に射影幾何のアイデアを応用し、最適値が不連続に変化する現象に幾何的な意味を与え、strict feasibility と KKT 条件の関係を明らかにした。また、イデアル論を交互射影法の解析に初めて応用し、厳密収束レートの公式と、挙動の変化する境界の定義方程式を求めた。これらの結果は、半正定値計画問題と最適化アルゴリズムに対する新しい見方を与え、最適化理論そのものの新しい展開に貢献するものである。

研究成果の概要(英文)：(1) We showed that strictly feasibility of the primal and the dual problem of SDP is equivalent to existence of nontrivial solution to the homogenized KKT system. (2) We obtained sufficient conditions for the optimal value of a singular SDP to change continuously, and a perturbing direction in which the optimal value changes continuously by using a facial reduction sequence. (3) When a semialgebraic set intersects a line non-transversely, we expressed the exact convergence rate of alternating projections with the multiplicity of a polynomial. We also obtained the polynomial defining the boundary which determines the behavior of alternating projections.

研究分野：最適化理論

キーワード：最適化理論 半正定値計画問題 凸代数幾何 交互射影法

1. 研究開始当初の背景

あるクラスの最適化問題に対して、特異な最適化問題を代数多様体上の点として表現し、凸代数幾何を用いて、その多様体の性質を調べる。これにより具体的な問題の振る舞いの良さ、悪さの簡単な判定法と、問題をより扱いやすい問題へ摂動変形するための統一的な変形理論の確立を目指す。凸代数幾何とは、代数幾何と最適化理論を基礎に、凸解析、計算代数、組み合わせ論など融合させた分野で、近年急速に発展し、最適化理論そのものを始め、統計学、生物数学などに応用されている。特に、凸でない問題に潜む凸性の活用、問題の複雑さの定量的な計算などに強力な手法を提供する。本研究では、行列補完問題におけるコーダルグラフと半正定値計画問題の非特異性の関係、Sparse Resultant を用いた非特異性の定義方程式の計算、最適化問題の代数的次数の研究を通じて、最適化問題を点として持つような代数多様体の構造と、その構造が最適化問題に対して持つ意味を解明する。

申請者は、最適化問題の集合を代数多様体として表すことで、従来独立に行われてきた正則性、特異性に関する研究を統合することが可能だと考えている。それにより、数値的に解き難い最適化問題を代数多様体上の点とみなしたとき、どのような点であるのか、どのように摂動すれば解きやすい問題になるのか、という問いを解決したい。また、十分に generic な最適化問題に対してどこまで強い主張が成り立つのかを解明をしたい。結果として、近年のデータの増大により、大規模な最適化問題を解く必要性が増す中で、意味のある解が確実に求められるようになることを期待する。

2. 研究の目的

本研究では、あるクラスの最適化問題に対して、特異な最適化問題を点として持つ代数多様体を構成し、多様体内での個々の問題の持つ幾何的特徴、また、他のクラスの最適化問題を点として持つ代数多様体との関係を調べる。そのため、まず先行研究の豊富な行列補完問題に対して、「コーダルグラフと半正定値計画問題の正則性」の関係を、代数幾何的に再考察する。その結果と比較しながら、Sparse Resultant 等の計算代数を用いて、一般の「半正定値計画問題の特異性の定義方程式を決定し、解析する。申請者自身による特異な半正定値計画問題の解析を元に、様々な特異性の定義方程式」も決定したい。また、チャーン類を用いた「最適化問題の代数的次数計算」に関する先行研究を応用し、具体的な応用例から得られるより狭いクラスの最適化問題の代数的次数を求め、代数多様体の大域的な性質を調べる。

従来の最適化理論は、一つの最適化問題の性質を調べることが目的であった。それに対し、最適化問題を代数多様体内の点と見なし、その点の幾何的な性質と、これまで研究されてきた最適化問題の特異性、正則性を対応づけるとともに、本研究の独自性がある。

さらに、その幾何的な性質を用い、最適化問題を数値的に解きやすい問題へ摂動する変形理論へと発展させることが、本研究の創造的な面である。これまで、数値的に不安定な最適化問題に対しては、乱数によるランダムな摂動を行うことで何らかの意味のある値を得て来た。このようなヒューリスティックな手法に理論的な意味を与える。

3. 研究の方法

(1) コーダルグラフと半正定値計画問題の正則性

行列補完問題は、統計学や機械学習などの影響を受けながら、近年盛んに研究されている。「コーダルグラフと半正定値計画問題の正則性」では、最適化問題の正則性、特異性と、凸代数幾何を用いて得られるグラフに関する条件を結び付ける。 H, Q_i は、半正定値行列補完問題に付随するグラフがコーダルグラフであることと、対応する半正定値計画問題が非退化であることが同値であることを、最適化理論を用いて示した。一方、グラフのコーダル性は、可換環論を通じ凸代数幾何と親和性が高い。G. Blekherman, R. Sinn, M. Velasco は、グラフがコーダル性を持つことと、クリーク複体の Stanley-Reisner 環を座標環に持つ代数多様体上で非負線形多項式が二乗和多項式であることが、同値であることが示された。申請者による、特異な半正定値計画問題に対する研究と多項式最適化問題の正則性の研究を発展させ、半正定値計画問題の特異性が持つ凸代数幾何的な意味を解明する。

初めは研究の対象を一般の問題ではなく行列補完問題に絞り、多くの具体例の考察によりシャープな結果を目指す。そのため、最適化ソルバー、数式処理ソフトウェアを用いた数値実験を積極的に行う。数値実験はノート PC 上でも行える体制にし、他の研究者との討論においても活用する。凸代数幾何のメインの国際会議である SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry 2019 および国内の研究集会に参加し、成果発表、情報収集、研究者との交流を積極的に行う。最適化理論に適した代数幾何の手法を収集すると同時に、最適化理論そのものも見直す必要があるため、代数幾何、計算代数、最適化理論関係図書を購入する。

(2) 半正定値計画問題の特異性の定義方程式

半正定値計画問題は様々な特異性を持つ可能性があり、それらが内点法などの数値アルゴリズムの挙動に影響する。本課題では、半正定値計画問題に現れる係数を代入することで、その問題

が特異であるかどうかを決定する判別多項式を求める。判別多項式とは、二次方程式の場合は解の重複度を調べる判別式に対応する多項式である。J. Nie, K. Ranestad, B. Sturmfels により、半正定値計画問題の様々な generic property を調べている。これらの議論を応用すれば、反対概念である特異性について調べることができる。

(3) 最適化問題の代数的次数計算

代数的次数は、最適化問題の係数に対して、最適解がどのくらい代数的に複雑な数になり得るかを表す。より具体的な応用例から得れる最適化問題に対して、代数的次数の計算、比較を行い、集合としての最適化問題の性質を別の角度から研究する。

平成32年度以降も、代数幾何、計算代数、最適化理論関係図書の購入を続ける。また、関連分野が多岐に渡るため、多面体や離散数学、計算機科学等の研究会などにも参加し、異分野の研究者との交流を積極的に行う。また、得られた成果を国内外の研究集会で発表する。

4. 研究成果

(1) 半正定値計画問題の主問題と双対問題が strictly feasible であるとき、主双対解のペアが KKT 条件を満たすことが知られている。本研究では、半正定値計画問題の主問題と双対問題が strictly feasible であることと、斉次化した KKT 条件が非自明解を持つことが同地になることを示した。研究結果を査読付き国際学会 Proceeding で発表した。

(2) 特異な半正定値計画問題に対して、感度分析を行った。半正定値計画問題では、右辺の摂動に関しては、緩やかな条件下で最適値が連続に変化する。しかし、係数行列を摂動した場合、たとえ主問題が正則(Slater 条件を満たす)であっても、最適値が不連続に変化する場合がある。本研究では、最適値が連続に変化するための十分条件を求め、具体例を構成することでそれらの条件を弱めることが難しいことを示した。また、今まで注目されていなかった Facial Reduction Sequence を用いて、最適値が連続的に変化するような摂動方向を求めた。研究結果を査読付き雑誌で発表した。

(3) 半代数的集合とアフィン線形空間が非横断的に交わるとき、交互射影法の収束レートは劣線形になることが知られている。既存研究では、エラーバウンド(二つの集合への距離関数に関する不等式)を用いて、収束レートの上界のみが与えられていたが、実際の収束レートとは大きな差があることが知られている。本研究では、半代数的集合が一つの多項式で与えられ、アフィン線型空間が直線の場合に、交互射影法を決定する漸化式を直接解くことで、厳密収束レートのある多項式の重複度で表すことに成功した。この結果を応用し、半代数的集合が二つの多項式で定義される場合に、交互射影法の挙動と収束レートを詳細に調べた。また、交互射影法で生成される点列の挙動が切り替わる境界の定義多項式をイデアルの消去理論を用いて求めた。研究結果を査読付き雑誌と研究集会の予稿集で発表した。

(4) 半正定値錐とアフィン平面の交叉は半正定値計画の実行可能領域であり、重要な研究対象である。半正定値錐とアフィン平面に対する交互射影法に関しては、収束レートの上界が singularity degree と呼ばれる量で与えられることが知られている。報告者は、交互射影法と1パラメータ行列の固有多項式に付随するニュートン図形が深い関係を持つことを発見し、ニュートン図形の考察を通じて、詳細な交互射影法の挙動解析を行なっている。また、3x3 半正定値行列からなる錐と3次元平面の具体例に対し、交互射影列を与える漸化式と、厳密収束レートを決定することが可能な初期値集合を表す曲線を求めた。現在この結果の一般化を行なっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ochiai Hiroyuki, Sekiguchi Yoshiyuki, Waki Hayato	4. 巻 -
2. 論文標題 Exact convergence rates of alternating projections for nontransversal intersections	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-023-00584-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 落合啓之, 関口良行, 脇隼人	4. 巻 -
2. 論文標題 交互射影法とイデアル論	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第 34 回 RAMP 数理最適化シンポジウム論文集	6. 最初と最後の頁 29-40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sekiguchi Yoshiyuki, Waki Hayato	4. 巻 188
2. 論文標題 Perturbation Analysis of Singular Semidefinite Programs and Its Applications to Control Problems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Optimization Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 52 ~ 72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10957-020-01780-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshiyuki Sekiguchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Homogenized KKT Systems and Strict Feasibility of Semidefinite Programs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of Nonlinear Analysis and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 229-232
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 関口良行
2. 発表標題 交互射影法の厳密収束レート
3. 学会等名 最適化：モデリングとアルゴリズム
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 関口良行
2. 発表標題 交互射影法とイデアル論
3. 学会等名 第 34 回 RAMP 数理最適化シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 Yoshiyuki Sekiguchi
2. 発表標題 Projective geometry and continuity of semidefinite programming
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (国際学会)
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Yoshiyuki Sekiguchi
2. 発表標題 Perturbation Analysis of Semidefinite Programs
3. 学会等名 NACA-ICOTA 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiyuki Sekiguchi
2. 発表標題 Perturbation Analysis of Singular Semidefinite Programs via Optimization Theory and Projective Geometry
3. 学会等名 Recent Development in Optimization III
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関