

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03632

研究課題名（和文）極大単調作用素の零点問題に関する新たな理論構築の研究

研究課題名（英文）Study of a new theory for the zero point problem of maximal monotone operators

研究代表者

茨木 貴徳 (Ibaraki, Takanori)

横浜国立大学・教育学部・教授

研究者番号：90345439

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、極大単調作用素の零点問題の解への近似法である近接点法で使われるリゾルベント作用素の値を求めるアルゴリズムの研究を行う。また、リゾルベント作用素は非拡大性を持つため、非拡大型写像の不動点近似法の研究も行う。初めに、バナッハ空間やヒルベルト空間においてさまざまな非拡大型写像の不動点近似法の成果を得た。そして、Q型およびR型のリゾルベント作用素の値を求めるアルゴリズムを得ることができた。さらに近接点法についても新たな成果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極大単調作用素の零点問題は工学、物理学や経済学等のさまざまな分野に応用される。近接点法は零点問題の解への代表的な近似法であるが、点列構成に用いられるリゾルベント作用素の値を求めることは一般的に容易ではない。先行研究はいくつかあるがそれぞれ課題がある。本研究ではこれら課題を解決できた。さらに、一連の研究で新たな不動点近似法や近接点を提案も行い学術的意義は高いと考える。また、近接点法は現実的な問題に対する具体的なアプローチであるが、先行研究における数学的には正しいが現実的計算が困難であった問題点を解決したことは数学以外の関連分野での応用上に大きなメリットであり社会的意義は高いと考える。

研究成果の概要（英文）：In this research, we study an algorithm for finding the value of the resolvent operator used in the proximal point algorithm to the solution of the zero point problem for maximal monotone operators. We also study a fixed point algorithm of nonlinear mappings of nonexpansive type satisfied by the resolvent operator. We first obtained some fixed point algorithms for nonlinear mappings of nonexpansive type in Hilbert space and a Banach space. Next, we proposed algorithms for finding the value resolvents of type (Q) and (R) in a Banach space. We also proposed a new algorithm for the zero point problem for maximal monotone operators.

研究分野：非線形関数解析学

キーワード：極大単調作用素 リゾルベント作用素 零点問題 近接点法 非拡大型非線形写像 不動点近似法 ヒルベルト空間 バナッハ空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

極大単調作用素の零点問題(以下、零点問題)は、数学のみならず物理学、工学、オペレーションズ・リサーチ、経済学等のさまざまな分野の非線形問題を定式化した問題で、多くの研究者によって解の存在理論や近似理論の研究がなされてきた。特に 1970 年代の Martinet、Rockafellar の研究を基礎にした近接点法の研究は凸最適化問題等の現実的な問題に対する具体的なアプローチであり重要な研究である。

近接点法には極大単調作用素の逆像から生成されるリゾルベント作用素と呼ばれる写像が用いられる。初期点に対し、リゾルベント作用素を繰り返し施して点列を構成する手法であるが、このリゾルベント作用素の正確な値をどのように求めるか?ということは長年の課題であり部分問題として認識されている。Rockafellar は自身が近接点法の提案時にこの問題提起もしており、正確なリゾルベント作用素の「近い値」を逐次的に求めて点列を構成する誤差を求めた手法も提案している。しかし、この手法は各ステップの誤差から構成される誤差数列は 0 に収束する必要がありステップ数が大きくなると、ほぼ正確な値を求める必要がある。仮に許容された誤差が比較的大きい条件だとしてもリゾルベント作用素の正確な値が分からない限り、誤差の許容範囲の値かどうかを判定するのは容易ではなく、根本的な解決方法ではない。また、近接点法の研究は 2000 年頃より Kamimura-Takahashi らの研究に代表されるようにバナッハ空間における研究を中心に爆発的に進展してきたが誤差を利用した方法以外での部分問題の解決を目指す研究は殆どないのが現状である。

一方 1973 年に Bruck はヒルベルト空間において“リゾルベント作用素の値”を求める近似法(以下、リゾルベント近似法)を提案したが、その点列構成には初期点を、解であるリゾルベント作用素の正確な値に「近い値」に設定しなければならず、近接点法の部分問題と同じ課題を抱えている。1990 年には Chidume がこの課題を解決する形でバナッハ空間において m -増大作用素に関するリゾルベント近似法を提案したが、点列の構成の際に具体的に求めるのが難しい関数を用いて点列を構成するという別の課題を抱えている。さらに他の課題もある。ヒルベルト空間の極大単調作用素をバナッハ空間へ拡張するとき、極大単調作用素と m -増大作用素の 2 つの別の概念に拡張される。バナッハ空間における近接点法の研究は極大単調作用素に関するものが主流であり、凸最適化問題や変分不等式問題等の応用面を考慮すると極大単調作用素に関する手法の部分問題の解決が必要となっている。

2. 研究の目的

本研究の目的はこれまで有効な解決法が示されなかった近接点法の部分問題の解決を目指すことである。1990 年頃からあまり研究が進んでいないリゾルベント近似法の研究を発展させ、これまでの課題の解決を行う。そしてヒルベルト空間における極大単調作用素に関するリゾルベント近似法に関する理論の再構築を行い、近接点法の部分問題の解決を目指す理論構築を行う。そして、より汎用性の高いバナッハ空間における理論構築と解明を目指す。

また、リゾルベント近似法や近接点法の研究は、非拡大型非線形写像の不動点を求める不動点近似法とも密接な関係がある。ヒルベルト空間における極大単調作用素から生成されるリゾルベント作用素は堅非拡大性という性質をもつ。一方、バナッハ空間におけるリゾルベント作用素のもつ堅非拡大性は複数の概念に拡張される。特に、目的である極大単調作用素に関しては、 P 型、 Q 型、 R 型と呼ばれる堅非拡大性である。これら非拡大性写像の不動点近似法を解明することで、リゾルベント近似法の研究にも役立つと考えられるため、写像の非拡大性の研究と、これら非拡大性写像の不動点近似法の理論構築と解明も目指す。

3. 研究の方法

はじめに、リゾルベント近似法の既存の研究の課題の解決を行うための先行研究の調査や情報収集をおこなう。次にリゾルベント近似法の理論構築と解明を目指す。それには、非拡大型非線形写像の不動点近似法に関する並行して理論構築と解明もめざす。そして近接点法の「部分問題」の解決を得るための理論構築を目指す。これらの研究を進めるための具体的な研究方法は以下のように行った。

- (1) 国内外の関連する国際会議や国内の研究集会に継続的に参加し、本研究に関する情報収集、参加した研究者と意見交換をおこなった。
- (2) 本課題に関連する書籍や学術誌などから文献調査で、先行研究や最新の成果からの情報

- 収集を行い、研究の方向性を検討する。
- (3) 本課題は研究代表者一人だが、成果物によっては他研究者とも共同研究を行い、共同研究者からの多角的な意見を反映する形でも研究を進める。
 - (4) 得られた成果に関しては、査読付きの国際学術誌へ投稿し、国際会議や国内の研究集会でも発表する。また、多くの意見を求めるため解説論文も紀要等に投稿する。

4 . 研究成果

研究成果に関して以下の成果が得られた。

- (1) リゾルベント近似法に関する研究
当初、ヒルベルト空間において、先行研究の2つの問題を解決するため研究をすすめ成果を得たが、その証明方法はもう少し検討を進めれば、いきなり難関のバナッハ空間に拡張できることに気が付き、さらに検討を進めバナッハ空間における Q 型および R 型のリゾルベント近似法の成果を得て、査読付きの国際学術誌に受理され掲載された。この近似法は初期点も任意の点でよく、点列構成もシンプルな形式で構成でき、先行研究の問題点をすべてクリアすることができた。ただし、コロナ禍で思うように研究が進められなかったこと、さらに、投稿先の学術誌の編集上の都合で掲載されたのは課題期間後の 2024 年 4 月となった。
- (2) 近接点法に関する研究
部分問題に関しては(1)の成果を得たことや、以降の近接点法の研究や(3)と(4)の不動点近似法の研究を進めることで、部分問題を解決する点列構成に関して、これまでと違う工夫が必要であることがわかり、いくつかの構成方法のアイデアが得られた。このことは理論構築に一定の成果が得られたと言えよう。また、部分問題の解決とは別に、近接点法に関しては新たな成果が得られた。先行研究の調査で 2018 年に許容範囲を認める収縮射影法をいう新たな不動点近似法が Takeuchi により提案されていたことが分かった。この手法を適用することで、ヒルベルト空間において新たな近接点法の成果を得ることができ学術雑誌に掲載され、国際会議や国内研究集会でも発表した。これは、既存の誤差法を用いた収縮射影法による近接点法とは違う新たなアプローチの誤差法で、近接点法の研究に新たな知見をもたらすことができた。さらにバナッハ空間への拡張も成功しており、零点問題の研究の発展に寄与できたものと考えている。
- (3) リゾルベント作用素のもつ非拡大写像に関する不動点近似法の研究
バナッハ空間においてリゾルベント作用素の持つ非拡大性について2つの不動点近似法の成果をえて、共に査読付き国際学術誌へ掲載され、国際会議や国内研究集会でも発表した。一つ目は Q 型リゾルベント作用素の持つ非拡大写像に対して、総和不可能誤差付の収縮射影法を用いた2つの共通不動点近似に関する成果を得た。二つ目は P 型、Q 型、R 型の写像を拡張した疑 P 型、疑 Q 型、疑 R 型に関する総和不可能誤差付の収縮射影法を用いた不動点近似法に関する成果を得た。この成果を用いた応用として、近接点法へも適用でき、零点問題の解への近似法も得た。これらの一連の研究は、不動点近似法を近接点法の関連をより深く解明できたことだけでなく、(1)と(2)の研究成果を得るための参考にもなった。
- (4) 新たな非拡大写像に関する性質の解明と不動点近似法の研究
ヒルベルト空間において吸引点という視点から写像の非拡大性の解明をすすめ、以下の2つの成果を得て、それぞれ査読付き国際学術誌へ掲載され、国際会議や国内研究集会でも発表した。一つ目は、非拡大写像である ハイブリッド写像の Baillon 型近似法をもちいて、2つの写像の共通不動点への弱収束定理を得た。二つ目は疑非拡大写像の概念を写像族に関する性質にすることで抽象化し、その2つの写像に関して Baillon 型と Mann 型を融合させた近似法に関しての弱収束定理を得た。これらの成果は非拡大性を新たな視点から除くことで不動点近似法へ新たな知見をもたらした。また、(1)から(3)の研究成果を得るための参考にもなった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 Ibaraki Takanori, Saejung Satit	4. 巻 2023:92
2. 論文標題 On shrinking projection method for cutter type mappings with nonsummable errors	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1186/s13660-023-03004-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 茨木貴徳・梶葉駿介・中野龍治	4. 巻 2274
2. 論文標題 零点問題における許容範囲を持つ縮小射影法とその応用	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 61-70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 茨木貴徳・梶葉駿介・竹内幸雄	4. 巻 2274
2. 論文標題 2つの可換な非線形写像の共通不動点への強収束定理	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 71-79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 T. Ibaraki	4. 巻 31
2. 論文標題 Approximation of the value of the resolvent of a maximal monotone operator in a Banach space	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 131-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ibaraki, S. Kajiba and Y. Takeuchi	4. 巻 2022
2. 論文標題 A weak convergence theorem for common fixed points of two nonlinear mappings in Hilbert spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Abstract and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1155/2022/9568060	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳	4. 巻 2214
2. 論文標題 2つの α -ハイブリッド写像に関する共通吸引点定理	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 153-161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳・梶葉駿介・竹内幸雄	4. 巻 2240
2. 論文標題 2つの可換な非線形写像に関する共通不動点への弱収束定理	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 153-161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳	4. 巻 2190
2. 論文標題 ヒルベルト空間における非線形写像族の共通不動点へ収束定理	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 8--13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳	4. 巻 2194
2. 論文標題 -ハイブリッド写像の族に関する不動点定理	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 18--23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T. Ibaraki, S. Kajiba and Y. Kimura	4. 巻 327
2. 論文標題 Approximation of a common fixed point of two nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Geometry, Algebra and Analysis, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 185-196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-5455-1_15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ibaraki and Y. Takeuchi	4. 巻 66
2. 論文標題 A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 61-77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳	4. 巻 2112
2. 論文標題 零点問題に関する誤差付きの近似定理	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 20-26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 茨木貴徳・梶葉駿介	4. 巻 2114
2. 論文標題 2つの非拡大型非線形写像に関する総和不可能誤差付の共通不動点近似	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 165-170
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 T. Ibaraki
2. 発表標題 A common attractive point theorem for two commutative nonlinear mappings
3. 学会等名 The 14th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ibaraki
2. 発表標題 Existence and convergence theorems for a family of λ -hybrid mappings
3. 学会等名 The 11th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ibaraki, S. Kajiba and Y. Takeuchi
2. 発表標題 A weak convergence theorem for common fixed points of two nonlinear mappings in Hilbert spaces
3. 学会等名 The 11th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ibaraki, S. Kajiba and R. Nakano
2. 発表標題 A shrinking projection method with allowable range for zero point problems in a Hilbert space
3. 学会等名 The 11th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 茨木貴徳・梶葉駿介・中野龍治
2. 発表標題 ヒルベルト空間における零点問題に関する許容範囲を持つ縮小射影法
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) "非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 茨木貴徳・梶葉駿介・竹内幸雄
2. 発表標題 2つの可換な非線形写像に関する共通不動点への強収束定理
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) "非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 茨木貴徳・梶葉駿介・竹内幸雄
2. 発表標題 2つの可換な非線形写像に関する共通不動点への弱収束定理
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) "非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Ibaraki
2. 発表標題 Fixed point theorems for a family of α -hybrid mappings in a Hilbert space
3. 学会等名 The Third International Workshop on Nonlinear Analysis and Applications, Faculty of Science and Mathematics, University of Nis, Serbia (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 茨木貴徳
2. 発表標題 2つの非線形写像に関する共通吸引点への収束定理
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) "非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 茨木貴徳
2. 発表標題 α -ハイブリッド写像族に関する存在定理および収束定理
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) "非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Ibaraki
2. 発表標題 Weak and Strong convergence theorems for common fixed points of a family of nonlinear mappings
3. 学会等名 The 13th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, HeNan Normal University, HeNan, China (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 茨木貴徳
2. 発表標題 ヒルベルト空間における非線形写像族に関する弱および強収束定理
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）"非線形解析学と凸解析学の研究"
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Ibaraki
2. 発表標題 Weak and strong convergence theorems for common fixed points of nonlinear mappings in a Hilbert space
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications South Asian University, New Delhi, India（招待講演） （国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------