

令和 4 年 5 月 26 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03636

研究課題名(和文) 後退確率微分方程式の応用に関する研究

研究課題名(英文) Study on Applications of Backward Stochastic Differential Equations

研究代表者

関根 順 (Sekine, Jun)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：50314399

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：1) XVAをBSDE理論を用いて調べ、田中章博氏との共同研究の中で成果を挙げた：例えば、既存研究の中で行われているモデルの一般化、より緩い無裁定条件の導出、裁定機会の存在についての考察、XVAの漸近展開を用いた近似計算の実施と実務で用いられるXVA計算の簡便法との比較などを行った。2) 状態変数が多次元のMarkov型確率微分方程式で与えられたMarkov型BSDEの数値解法に関して、結晶格子を状態空間に持つ離散時間マルコフ連鎖を用いた後退確率差分方程式で近似する研究を実施し、連続時間モデルへの収束スピードに関する定量的評価を行った(田中章博、深澤正彰、安藤真志氏との共同研究)

研究成果の学術的意義や社会的意義

1) 金融デリバティブの定量評価においてインパクトの大きいXVA計算について、後退確率微分方程式理論を用いて、理論整備や一般的数理的モデルの提案が行われたことに意義がある。また、最も基本的な性質：「無裁定条件」が保証されるためのパラメータ条件や逆に裁定機会が存在しうる条件の導出が行われたことは重要である。さらに、金融実務で行われている簡便法の限界や改良の提案等も行われ、数学理論と金融実務の融合が図られた。

2) より簡便な離散時間離散状態を持つ後退確率差分方程式モデルを提案し、このモデルに基づいた簡易な数値計算手法の構築と、連続時間連続状態モデルとの数値計算誤差の定量的評価が行われた。

研究成果の概要(英文)：1) Using BSDEs(Backward Stochastic Differential Equations), XVA(X-Valuation Adjustment) for OTC derivative securities are studied from a mathematical finance point of view, and have obtained the following results: (i) mathematical model for financial markets are generalized. (ii) A sharper sufficient condition to ensure the No-arbitrage opportunities is obtained. (iii) Interesting examples for the existence of arbitrage opportunities are provided. (iv) An approximated computational method using an asymptotic expansion is provided, and practitioners' method for computing XVA is well-explained from a theoretical point of view. 2) Backward stochastic difference equations driven by random walks on crystal lattices is studied to numerically approximate the solution of BSDEs. Convergence speed is computed and the computational error is quantitatively analyzed.

研究分野：確率モデル、数理ファイナンス

キーワード：後退確率微分方程式 後退確率差分方程式 XVA 動的リスク尺度 非線形条件付き期待値

1. 研究開始当初の背景

A)金融派生商品の価格計算や、金融リスク管理の精緻化のため、2008年の世界的金融危機以降、金融実務で行われるようになった XVA 計算は、理論的には非線形 BSDE の解を計算する問題と捉えられる。実際は、実務的には複雑過ぎるため、実際は、簡便的モデルに基づく近似計算が用いられているが、依然として大変計算負荷の高い対象である。

B)「非線形 Feynman-Kac 公式」の名で呼ばれる Markov 型非線形後退確率微分方程式と2階放物型非線形偏微分方程式の対応に着目して、前者の解の数値解法アルゴリズムから後者の解を数値計算するための“確率的”アルゴリズムが構成できる。これに深層学習技術を組み合わせる(この手法は Deep BSDE と呼ばれる)、所謂「次元の呪い」を打破するような(状態変数の次元が 100 次元超!)“刺激的”な数値シミュレーション結果例が報告されている。

上記 A), B) の状況を踏まえて、後退確率微分方程式(Backward Stochastic Differential Equation: BSDE)について、理論的観点のみならず、応用の観点や数値解析手法の観点から研究を推進しようと考えていた。

2. 研究の目的

1)XVA 計算に関する BSDE を用いた理論的整備を行うこと。実際、金融実務界で今日行われている XVA の簡便的モデルに基づく近似計算は、理論的な整合性(無裁定の性質、重複した価格調整:ダブルカウントが存在しないことなど)がはっきりしないなどの問題点が指摘されていた。これらの点を、無裁定を保証するためのシャープな十分条件の導出や、例えば「摂動展開」を用いた XVA-BSDE 近似計算法の開発などを通して明らかにすることを目指す。

2)Deep BSDE 法について知見を深め、改良版の開発を行うこと。そもそも Deep BSDE 手法にはその有効性に関する数学的な照明が与えられていない状況であった。

3)BSDE のさらなる応用を考察すること。BSDE には、モデルの不確実性(uncertainty, ambiguity)を考慮した「非線形(条件付)期待値」を表現できる、通常の効用関数の範疇に収まらない再帰的効用を表現できる、等の特色があるので、これを活かした応用研究の可能性を探ること。

3. 研究の方法

・XVA を BSDE 理論を通して調べることについては、当時社会人博士課程大学院生として在籍していた田中章博氏(三井住友銀行)と共同研究の形で実施する。田中氏は、XVA に関して実務的立場で精通しており、一方、数理ファイナンス・確率解析についても高いスキルを有する人材であり、本研究計画の遂行に必要な不可欠な人材と考えられる。

・Deep BSDE 法については、本計画立案時に次々と世界中から研究成果が発表され、当初考えていたアイデアを先にやられてしまった部分が多々あった。そこで、計画を変更し、ブラウン運動で駆動される BSDE を研究対象とすることは止めて、マルコフ連鎖や点過程で駆動される「離散構造を含んだ」BSDE に対する数値解法の研究を実施することとした。

・動的なリスク計測に用いる動的リスク尺度の BSDE を用いた解析や、必ずしも BSDE に収まらない非線形期待値(歪曲確率や、Choquet 積分などの非線形積分)の研究を通して、BSDE 理論へのフィードバックを図ることを目指す。

4. 研究成果

1)XVA を BSDE 理論を用いて調べ、田中章博氏との共同研究の中で以下の成果を挙げた:

・既存研究の中で行われているモデルの一般化:多次元伊藤過程モデルや、確率的強度を持つデフォルトリスクモデル、確率的金利モデル(資産クラス毎にレポレートを採用)を用いた一般化を行った。

・既存研究の設定の不具合を修正し、より緩い無裁定条件を BSDE に関する比較定理や BSVP(Backward Stochastic Viability Property)を用いて導出した。

・裁定機会の存在についても考察を行い、発行者、購入者双方にとっても裁定機会が存在しうることをいくつかの具体例と共に論じた。

・貸出金利と借入金利のスプレッドを微小パラメータにとり、XVA の漸近展開を用いた近似計算をおこない、実務で用いられる XVA 計算の簡便法との関係を明らかにした。漸近展開については 1 次項のみならず 2 次近似項の導出も行った。

・成果をいくつかの国際研究集会で発表し、特に XVA を数理ファイナンスの理論的見地から研究している大家の一人の Marek Rutkowski 教授と意見交換を重ねた。

2)状態変数が多次元の Markov 型確率微分方程式で与えられた Markov 型 BSDE の数値解法に関して、結晶格子を状態空間に持つ離散時間マルコフ連鎖を用いた後退確率差分方程式で近似するアプローチを考案した。このアプローチは、離散時間近似解が行列に関する線形計算などを用いて明示的に計算できる利便性を持っている。さらに、結晶格子の刻み幅を0に収束させてゆく際の、連続時間・連続状態 BSDE への収束スピードを Wasserstein 距離を用いて評価した(田中章博、深澤正彰、安藤

眞志氏との共同研究)。この研究は、1次元ランダムウォーク近似に関して得られていた既存研究の多次元版への拡張とみなされる。

3) 行動経済学で提示された非線形な「歪曲確率」を多期間・連続時間モデルに展開してゆく試み、特に「時間整合性」を限定的に実現するモデルの解析について、Ma, Wong, and Zhang (2018, arXiv)の結果の発展を試みた。得られた限定的な結果は、指導教官を務めた共同研究者山田貴一氏の修士論文にまとめられた。この先、条件付歪曲期待値と後退確率差分方程式や後退確率微分方程式との関連が明らかになれば興味深い。

4) 雑誌「応用数理」に BSDE に関するチュートリアル記事を連載した。

5) 弱時間整合性を持つ動的リスク尺度を反射型後退確率差分方程式(時間が離散、状態は離散/連続)を用いて構成した。これは、理論的には重要だが実務的には「強すぎる」性質である強時間整合性を緩めた、理論・応用両面から意味深い結果であり既存研究の拡張(既存研究では離散状態空間上でしか調べられていなかった)にもなっている。結果の一部は共同研究者(大井崇史氏)の修士論文の中でまとめられた。

6) 後退確率差分方程式(時間が離散、状態は連続)の近似的数値計算法として、値関数の補間と数値積分のために2種類のスパースグリッドを組み合わせて計算する手法を提案した。状態空間の次元が高かつ値関数の滑らかさが保証されるときには有効な手法であると考えられる。数値実験を通してその有効性や適用限界を観察することができた。結果の一部は共同研究者(兼子晃寛氏)の修士論文の中でまとめられ、日本応用数理学会研究部会連合発表会にて報告された。

7) 多次元結晶格子上のランダムウォークに関する離散確率解析の整備を行った: 多重確率積分、カオス分解、Clack-Ocone 公式、Skolohod 積分、部分積分公式について結果を得た。これらは1次元ランダムウォークに関する既存結果の拡張になっている。上記2)の中で行われている部分積分公式を用いた BS Δ E (Backward Stochastic Difference Equation) の解の定量的評価の中でこの成果が用いられた。結果の一部は共同研究者の修士論文(上野有祐氏)の中でまとめられた。

8) 連続時間マルコフ連鎖で駆動される後退確率微分方程式に関して以下の考察・解析を実施した: (i) マルコフ型後退確率微分方程式と関連した非線形常微分方程式が、マルコフ連鎖の生成行列の形状に依存して、数値解析が難しいいわゆる硬い(stiff)方程式が現れ得ることを確認した。その場合に有効な数値解法として、後退確率微分方程式に関する線形多段法を適用するのが有効ではないかとの知見を得た。(ii) 連続時間マルコフ連鎖や点過程を用いてネットワーク上でモデル化されるサイバー保険のプライシングやリスク計量化に後退確率微分方程式が活用できるとの知見を得て、さらに、サイバー保険のプライシングモデルの研究を行っている研究者(Stefan Weber 教授, Hannover 大学)との意見交換を行った。(iii) モデルの不確実性を考慮した連続時間非線形マルコフ連鎖と後退確率微分方程式の関連性について考察した。また、学生(土橋健吾氏)の修士論文研究指導を通して、モデルの不確実性を考慮した確率微分方程式モデルの非線形マルコフ連鎖近似法の実装について知見を得た。

9) 2次元結晶格子(正三角形格子)上のランダムウォークで駆動される BS Δ E モデルを用い、動的リスク尺度を用いてリスク最小化を行う経済モデルの中で達成される均衡の導出、BS Δ E を用いた均衡の特徴づけを行った(深澤正彰、佐藤高志氏との共同研究)。数値計算における簡便性があることや、バリエーションスワップのモデルが構成し易いなどのメリットが認められ興味深い。

10) Andrea Macrina 氏(UCL)との共同研究の中で、終端値を所与の確率変数で与える Randomized Markov bridge 過程のフィルタリング計算やフィルタリング方程式(Kushner-Stratonovich 方程式)の導出を行った。さらに、歪正規過程に関する明示的計算や、CO2排出権取引モデルの提案など応用例の提案も行った。

11) ペアトレーディングに関する長期間最適化問題を一般的な1次元エルゴード型拡散過程モデルを用いて取り扱い、最適解を定める代数方程式の導出に成功した。(深澤正彰、前田ひとみ氏との共同研究)。

12) UCL (University College London) の研究グループとの共同研究が開始され、いくつかのトピックスについて意見交換しながら知見を得ている。例えば、(i) Choquet 積分の反復を用いて構成される BS Δ E やその BSDE への収束、および関連した動的リスク尺度に関する研究の応用可能性。(ii) 行動経済学で提案された S 字型効用関数を用いて、離散時刻でパフォーマンスを測定しながら連続時間ポートフォリオ最適化を行う問題について、Epstein-Zin 型再帰効用の適用可能性。

刊行論文:

- [1] Jun Sekine and Akihiro Tanaka: “Notes on backward stochastic differential equations for computing XVA”, Mathematics for Industry (Proceedings of the Forum “Math-for-Industry” 2018 Big Data Analysis, AI, Fintech, Math in Finances and Economics, Springer) 15–50, 2021.
- [2] Masaaki Fukasawa, Hitomi Maeda, and Jun Sekine: “On optimal thresholds for pairs trading in a one-dimensional diffusion model”, The ANZIAM Journal 63(2) 104–122, 2021.
- [3] Andrea Macrina and Jun Sekine: “Stochastic modelling with randomised Markov bridges”, Stochastics 93(1), 29–55, 2021.

解説記事:

- [4]–[7] 関根 順:「後退確率微分方程式とその応用 (I)–(IV)」、応用数理 29(1)–(4), (2019–2020)

研究発表:

- [8] Jun Sekine, “The XVA issues and related BSDEs”, SIAM Conference on Control and Optimization, Chengdu, China, (2019)
- [9] Jun Sekine, “Remarks on Arbitrages in Bilateral Derivative Trading with Repo Markets”, The Second International Symposium on Partial Differential Equations & Stochastic Analysis in Mathematical Finance, Tsinghua International Mathematics Conference Center, Sanya, China, (2020)
- [10] Jun Sekine, “Backward stochastic difference equation driven by multidimensional random walk on a lattice: convergence analysis via Wasserstein central limit theorem”, Centre for Financial Mathematics Seminar, University of Wollongong, Australia, (Online), (2021)
- [11] 関根 順, “Stochastic Modeling with Randomized Markov Bridges”, 日本応用数理学会 2019 年度年会, 東京大学 (2019).
- [12] 関根 順, 「仮想通貨, スマートコントラクト, リスクの計量化: 数理ファイナンスの立場から」、日本応用数理学会 2018 年度年会, 名古屋大学 (2018)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 関根 順	4. 巻 29 (1)
2. 論文標題 後退確率微分方程式とその応用(I)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 35--40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/bjsiam.29.1_35	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 関根 順	4. 巻 29 (2)
2. 論文標題 後退確率微分方程式とその応用(II)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 31--36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/bjsiam.29.2_31	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 関根 順	4. 巻 29 (3)
2. 論文標題 後退確率微分方程式とその応用(III)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 28--33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/bjsiam.29.3_28	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 関根 順	4. 巻 29 (4)
2. 論文標題 後退確率微分方程式とその応用(IV)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 30--35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/bjsiam.29.4_30	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Andrea Macrina and Jun Sekine	4. 巻 Online Publication
2. 論文標題 Stochastic modelling with randomized Markov bridges	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastics	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/17442508.2019.1703988	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jun Sekine and Akihiro Tanaka	4. 巻 35
2. 論文標題 Notes on backward stochastic differential equations for computing XVA	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics for Industry	6. 最初と最後の頁 15-50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-16-5576-0_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Fukasawa, Hitomi Maeda and Jun Sekine	4. 巻 63
2. 論文標題 On optimal thresholds for pairs trading in a one-dimensional diffusion model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The ANZIAM Journal	6. 最初と最後の頁 104-122
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1446181121000298	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 田中章宏
2. 発表標題 BSDEs driven by multi-dimensional random walk on a lattice: convergence analysis via Wasserstein Central Limit Theorem
3. 学会等名 第17回日本応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Jun Sekine
2. 発表標題 The XVA issues and related BSDEs
3. 学会等名 SIAM Conference on Control and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jun Sekine
2. 発表標題 Remarks on Arbitrages in Bilateral Derivative Trading with Repo Markets
3. 学会等名 The Second International Symposium on Partial Differential Equations & Stochastic Analysis in Mathematical Finance (Tsinghua International Mathematics Conference Center, Sanya, China) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 関根 順
2. 発表標題 条件付歪曲期待値の時間整合性：非均一な分散構造を持つモデルの解析
3. 学会等名 日本応用数理学会 第16回研究部会連合発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 関根 順
2. 発表標題 Stochastic Modeling with Randomized Markov Bridges
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会, 東京大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jun Sekine
2. 発表標題 Backward stochastic difference equation driven by multidimensional random walk on a lattice: convergence analysis via Wasserstein central limit theorem
3. 学会等名 Centre for Financial Mathematics Seminar, University of Wollongong, Australia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田中 章博 (Tanaka Akihiro)	三井住友銀行	
研究協力者	深澤 正彰 (Fukasawa Masaaki)	大阪大学 (14401)	
研究協力者	マクリナ アンドレア (Macrina Andrea)	ユニバーシティカレッジロンドン	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
英国	University College London		