

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：21401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03639

研究課題名（和文）非凸最適化問題に対する作用素分割法に関する研究

研究課題名（英文）On the operator splitting algorithms for nonconvex optimization problems

研究代表者

松下 慎也（Shin-ya, Matsushita）

秋田県立大学・システム科学技術学部・准教授

研究者番号：20435449

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は非凸関数を含む複数の関数の和を最小化する解を見つけるためのアルゴリズムを提案し、分析することを目的とする。正則化技術を用いることで、この問題は単調作用素の和のゼロ点を求める問題として一般化することができ、作用素分割法を用いて問題を解くことができる。ここでは、数値的にロバストな作用素分割法を提案した。特に、提案手法によって生成された近似列の収束性を示し、提案手法の有効性を数値実験により確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複数の関数の和を最小化する問題は、データから特徴情報を抽出するスパース正則化に関する重要な問題である。2つの関数の和の最小化には理論的に優れた解法が提案されているものの、より一般的な問題に対してはアルゴリズムのロバスト化と高速化に関する研究が不十分であった。本研究によって提案されたアルゴリズムは、生成された近似列と解との距離が単調非増加性を満たす。またラッソ回帰や最適制御問題に提案手法を適用したところ、その有効性を数値実験によって確認できた。

研究成果の概要（英文）：This research aims to propose and analyze algorithms for finding a minimizer of the sum of functions, including nonconvex functions. By employing the regularization techniques, the problem can be generalized as a problem of finding a zero point of the sum of monotone operators and operator splitting algorithms can be used to solve the problem. Here, we proposed numerically robust operator splitting algorithms. In particular, we showed the convergence of the algorithms and confirmed the effectiveness of the proposed algorithms by numerical experiments.

研究分野：数理工学

キーワード：作用素分割法 非凸最小化問題 アルゴリズム 近接写像 不動点

1. 研究開始当初の背景

実社会で現れる様々な問題は複数の関数の和を最小化する問題として自然に表現する事ができる。この問題は所望の条件を全て満足する解を見つけるための理想的な数理モデルとして数学だけにとどまらず工学、経済学などの問題を含む非常に有用な問題である。

データから特徴的な情報を抽出するスパース正則化は、非凸関数と微分可能凸関数の和の最小化問題として表現されるが、正則化の手法を用いて微分不可能凸関数と微分可能凸関数の和を最小化する問題を構成する。この問題には理論的に優れた近接勾配法が適用できるものの、関数の勾配情報を利用するためその応用範囲は限定されていた。

一方、関数の和の最小化問題は単調作用素の和の包含式の解を見つける問題として一般化でき、この問題に対して有効な作用素分割法がこれまでに研究されている。先に述べたスパース正則化に対する近接勾配法も作用素分割法の特別な例となることが知られている。作用素分割法は生成した近似列の収束性の評価で必要となる不等式や指標が利用できない為、解法の改良や収束レートの評価に関する理論を構築する上で大きな障壁となっている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、複数の関数の和の最小化に対して柔軟に対応できる作用素分割法に基づく解法の開発を目指す。特に非線形関数解析学の分野で活発に研究されている作用素分割法および関連する主双対分割法、近接勾配法の加速化法に関する知見を活用し、大規模な問題に対してもロバストな収束性を維持できる解法を目指す。また関連する工学の問題に開発した解法を適用してその有効性を検証する。

3. 研究の方法

今回対象とする問題の解法を検討する際、微分不可能凸関数の近接写像及びその一般化である単調作用素のリゾルベントと呼ばれる写像の性質について調査する必要がある。これにはラッソ回帰等の先行研究を参考にし、関連する他の凸関数に対する近接写像をどのように計算するかを調べる。また、最近の近接勾配法の加速化に関する知見を参考に解法の改良を試みる。

改良した作用素分割法の収束性については、先行研究で得られている近接勾配法の加速化法及び関連する不動点アルゴリズムの加速化法の収束の証明を参考にして、それらをうまく組み合わせることができるか検討し、提案手法から生成された近似列の収束性を理論的に保証できるかを検討する。

上記の研究方法を遂行するための具体的な研究方法について以下に示す。

- ◇ 国内外を問わず関連する学会(非線形解析学と凸解析学に関する国際会議(NACA)、不動点とその応用に関する国際会議(FPTA)、日本数学会、OR学会、RAMPシンポジウムなど)、研究集会(京都大学数理解析研究所研究集会など)に継続して参加することで、本研究に関する意見を求めるとともにディスカッションを行う。
- ◇ 関連書籍、オンラインジャーナル(SIAM, Springer, Elsevier など)を活用して情報収集をおこなう。さらに関連分野の研究者達との研究打ち合わせによって関連情報を収集しながら研究の方向性を設定する。
- ◇ 得られた成果は論文としてまとめ、学術雑誌に投稿する。
- ◇ ソフトウェア(MATLAB など)及び計算機を援用した数値実験を実施することで、今回提案した解法の有効性の検証を行う。

4. 研究成果

研究方法で挙げた内容に対して、以下の成果が得られた。

(1) 最良近似問題に関連する解法の研究：

様々な制約を同時に満たす解の候補の中から所望の解を見つける問題は複数の単調作用素の和の包含式を解く問題として表現できる。この問題に対して不動点アルゴリズムのアイデアを改良した解法を提案し、その収束性を理論的に保証した。得られた研究成果の一部を国際会議 NACA-ICOTA2019 や ICFTA2019、また日本数学会秋季総合分科会・実関数論分科会、RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」で発表した。また、成果は論文として学術雑誌に掲載された。

(2) 主双対分割法に関する研究：

これまでに提案された不動点アルゴリズムのアイデアを利用して、複数の凸関数と行列及び凸関数の合成関数との和に関する最小化問題に対して解法を提案した。提案手法の近似列はヒルベルト空間において解に収束することが理論的に保証される。成果をまとめた論文は京都大学数理解析研究所講究録と学術雑誌に掲載された。また、関連する研究成果を国際会議 IFORS 2021, 日本数学会(日本数学会秋季総合分科会・実関数論分科会), RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」にて発表した。

(3) 作用素分割法の改良に関する研究：

作用素分割法に対して、近接勾配法で提案されている加速化法を応用する研究が盛んに行われている。先行研究のステップサイズの条件は制限が厳しく、近似列のロバスト性が損なわれるという課題があった。解法の高速度化とロバスト性の両方を実現するための改良を提案し、生成された近似列のロバスト性と収束性を理論的に示した。提案手法のステップサイズや収束で必要となるパラメータの条件は容易に検証可能である。得られた成果は論文にまとめ学術雑誌に掲載予定である。また、関連する研究成果を RIMS 研究集会「RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 国内シンポジウム(第 34 回 RAMP 数理最適化シンポジウム (RAMP 2022))にて発表した。

(4) 提案手法の応用研究：

提案した作用素分割法の応用について検討した。ソフトウェア MATLAB を用いて提案手法に基づくラッソ回帰に対する解法のプログラムを作成し、テスト問題に対してその有効性を既存の解法と比較する数値実験を行った。提案手法は既存の近接勾配法よりも高速に解に収束することが今回の数値例で確認できた。さらに、近接勾配法の加速化法と比較した結果、収束速度は提案手法が劣っていることがわかった。提案手法の高速度化については今後改善が必要であることがわかった。一方、加速化法の数値例では近似列のロバスト性が損なわれていたが、提案手法は解と近似列との距離が単調非増加性を常に維持しており、ロバスト性を持つ事が数値実験により確認された。

次に、提案手法をスパース最適制御に応用した。この問題は最小燃料制御とも呼ばれ、古くから研究されている。スパース最適制御は複数の制約条件を満たすスパースな制御入力(関数)を見つける問題であり直接解を見つけることは困難であるが、離散化の手法を用いて有限次元空間における大規模な凸最適化問題を解くことで近似解を得ることができる。この凸最適化問題に対して提案手法と既存の解法を適用して性能を比較する数値実験を行った。近接勾配法に基づく解法との比較では、提案手法の方が高速に解に収束することが確認できた。また、近接勾配法の加速化法に基づく解法との比較では提案手法はほぼ同程度の収束の速さであることが確認できた。今回の結果を受けて、大規模な凸最適化問題に対する提案手法の有効性を確認することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒	4. 巻 2214
2. 論文標題 交互近接勾配法とその応用	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 39 ~ 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 松下慎也	4. 巻 2214
2. 論文標題 Douglas-Rachford法の改良について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 135 ~ 138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 8
2. 論文標題 Strongly convergent fixed point algorithm with applications to structured monotone inclusion problems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 31 ~ 48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 71
2. 論文標題 A splitting method for finding the resolvent of the sum of two maximal monotone operators	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Optimization	6. 最初と最後の頁 1863 ~ 1882
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/02331934.2020.1839068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 -
2. 論文標題 Alternated inertial forward-backward-forward splitting algorithm	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Numerical Algebra, Control and Optimization	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/naco.2022035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 9
2. 論文標題 Alternated inertial fixed point algorithms	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Minimax Theory and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 -
2. 論文標題 Convergence analysis of an alternated inertial three-operator splitting algorithm with applications to optimal control problems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 松下慎也	4. 巻 -
2. 論文標題 作用素分割法に基づく最適化手法について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 第34回 RAMP数理最適化シンポジウム論文集	6. 最初と最後の頁 41-54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 松下慎也	4. 巻 2194
2. 論文標題 Primal-dual splitting algorithms and its applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 89-96
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 松下慎也	4. 巻 2190
2. 論文標題 On splitting methods for monotone operators	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 松下慎也	4. 巻 2112
2. 論文標題 On the resolvent of the sum of maximal monotone operators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 208-212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 作用素分割法に基づく最適化手法について
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 第34回 RAMP数理最適化シンポジウム「連続最適化アルゴリズム：理論と応用の架け橋」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 作用素分割法とその応用
3. 学会等名 RIMS共同研究「関数空間論とその周辺」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 Proximal Splitting Algorithms for Optimization Problems
3. 学会等名 The 22nd Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS 2021) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 Douglas-Rachford法について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 Douglas-Rachford法の改良について
3. 学会等名 RIMS共同研究「非線形解析学と凸解析学の研究」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 主双対分割法の改良について
3. 学会等名 2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 主双対分割法について
3. 学会等名 2021日本数学会年会・実関数論分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 主双対分割法とその応用
3. 学会等名 RIMS共同研究「非線形解析学と凸解析学の研究」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 正則化凸最小化問題について
3. 学会等名 2019日本数学会秋季総合分科会・実関数論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 On splitting methods for monotone operators
3. 学会等名 RIMS共同研究「非線形解析学と凸解析学の研究」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 Forward backward algorithms with finite convergence
3. 学会等名 International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis International Conference on Optimization Techniques and Applications (NACA-ICOTA2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 On a splitting method for finding the resolvent of the sum of maximal monotone operators
3. 学会等名 The 13th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------