

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03666

研究課題名（和文）改良された動的スケールリングが導くトポロジカル相転移の高精度解析法と普遍性の研究

研究課題名（英文）Study on highly accurate analysis and critical universality for topological phase transitions by the use of the improved dynamical scaling

研究代表者

尾関 之康 (Ozeki, Yukiyasu)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：70214137

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：KT転移に始まるトポロジカル相転移系やスピングラス転移系では非常に遅い緩和によるシミュレーションの難しさが共通の課題になっている。非平衡緩和法は、そのような系に系統的な数値解析を実現してきた。さらに最近、ベイズ推定とカーネル法を利用して、動的スケールリング解析が改良され、汎用で高信頼・高効率な解析法に発展した。これにより、三角格子反強磁性XY模型のカイラル転移とKT転移、磁場中三角格子反強磁性ハイゼンベルグ模型、3次元イジングスピングラス模型の普遍性クラスを明らかにした。また、Event-Chain法への応用や、ネットワーク上のパーコレーション系の解析への応用に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

KT転移に始まるトポロジカル相転移の研究は、Z2ボルテックス転移やスキルミオン等、様々な現象に対象が広がっている。このような系では非常に遅い緩和によるシミュレーションの難しさが共通の課題になっている。非平衡緩和法は、遅い緩和によって平衡シミュレーションに困難を来す系に、系統的な数値解析を実現してきた。最近、ベイズ推定とカーネル法を利用して、非平衡緩和法に現れる動的スケールリング解析が改良され、汎用で高信頼・高効率な解析法に発展した。この方法を活用して論争されている諸問題、フラストレーション系やランダム系、パーコレーション問題の解決や、普遍性クラスに関する議論を深化させることに成功した。

研究成果の概要（英文）：The difficulty of simulation due to very slow relaxation is a common issue in topological phase transition systems starting from the KT transition and spin glass transition systems. Non-equilibrium relaxation methods have provided systematic numerical analysis for such systems. More recently, the dynamical scaling analysis has been improved using Bayesian estimation and the kernel method, and developed into a general-purpose, reliable, and efficient analytical method. This has revealed the chiral and KT transitions of the triangular lattice antiferromagnetic XY model, the triangular lattice antiferromagnetic Heisenberg model in a magnetic field, and the universality classes of the 3-D Ising spin glass model. We have also successfully applied the method to the Event-Chain method and to the analysis of percolation systems on networks.

研究分野：相転移・臨界現象の統計物理学

キーワード：動的スケールリング解析 非平衡緩和法 トポロジカル転移 スピングラス転移 フラストレーション系  
パーコレーション カーネル法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

Kotleritz-Thouless (KT) 転移に始まるトポロジカル相転移の研究は、Z<sub>2</sub> ボルテックス転移やスキルミオン等、様々な現象に対象が広がっている。このようなフラストレーション系やスピングラスのようなランダム系では非常に遅い緩和によるシミュレーションの難しさが共通の課題になっている。多様な振る舞いを示すトポロジカル相転移の諸問題、特に転移の識別や有無に関しては安定した結論を得ることが難しく、また臨界普遍性に関しては系統的な議論すら少ない。

非平衡緩和法は、遅い緩和によって平衡シミュレーションに困難を来す系に、系統的な数値解析を実現してきた。さらに最近、ベイズ推定とカーネル法を利用して、非平衡緩和法に現れる動的スケーリング解析が改良され、汎用で高信頼・高効率な解析法に発展した。この方法を活用して論争されている諸問題の解決や、普遍性クラスに関する議論を深化させる。さらに、この種の系の解析法として非常に強力であることを周知し、汎用な標準解析法としての地位の確立を目指す。

## 2. 研究の目的

### (1) トポロジカル相転移:

トポロジカル相転移の多様性は上に述べた通りだが、転移の有無、転移の識別、転移の描像等についての研究は、実験的にも理論的にも十分とは言えない。長距離秩序を伴わないトポロジカル相転移系は秩序変数の定義が一意的でなく、総じて解析が難しく、様々な議論を生じさせている。多様なトポロジカル相転移系全般に通用する、信頼性の高い高効率な解析法の確立は、この分野の発展にとって最重要な課題と言える。

### (2) 遅い緩和への対応:

トポロジカル相転移の研究は、相転移の有無や相図の構造、普遍性やその有無について様々な議論が交わされている。例えば、KT 転移が指摘されているモデルでは、その存在の判定でしばしば論争が起きている。しかし、いくつかの例外を除いて、シミュレーションにおける遅い緩和は、安定した結論や統一的な理解を妨げてきた。この問題は、スピングラス系においても長年の課題であり、過去30年の統計物理学や計算物理学の発展は、この解決に注がれてきたと言っても過言でないだろう。最近改良に成功した、非平衡緩和法における動的スケーリング解析は、遅い緩和に影響されにくい非平衡緩和法の特徴と協調して、この種の問題の解決に大きな役割を果たすことが期待される。汎用で高信頼・高効率なスケーリング解析が計算機上でほぼ自動化され、複数の解析を組み合わせるような手間の掛かる作業、例えば Bootstrap 法や、幾つかの漸近形を比較して転移の種類を特定することが可能になった。トポロジカル相転移系にとって、転移温度の評価、転移の識別、臨界指数の評価を高信頼・高効率で実施するのに最適な方法と言える。

## 3. 研究の方法

### (1) 非平衡緩和法と臨界指数の評価:

非平衡緩和法は、平衡状態を待たずに緩和過程を解析するので、緩和の遅い系では際立って有効である。普遍性の議論には臨界指数の高精度評価が必要だが、これは臨界点直上での秩序変数とその揺らぎの緩和データで求められる。この作業は、転移温度が与えられていれば模型に依らずにほぼ系統化されている。

### (2) 動的スケーリング解析:

KT 転移に始まるトポロジカル相転移系での転移温度評価は通常難問だが、動的スケーリング解析は有効に働く。また、少なくとも KT 転移系では低温相内も常に臨界的なため、相内全体で臨界指数の温度依存性が定義され、従来放置されてきた議論が可能になる。

①カーネル法の導入によって、スケーリング関数のモデル設定がなくなった。

②共役勾配法による最適化によって、スケーリング解析は計算機上で自動化された。

③Bootstrap 法が導入可能になり、推定されたパラメーターの精度が議論可能になった。

④転移の識別:

例えばKT 転移と強磁性転移の識別は、3種類のスケーリングを比較して行われる。一つは緩和時間の関数形を対数発散に仮定したもの。一つは関数形を冪発散に仮定したもの。さらに、関数形を仮定しないものが3つ目である。最後のケースは関数を仮定していない分、前述の2つに比べて結果の正当性が上位になる。転移温度等の物理的情報は、緩和時間を比較することによって、どちらの転移の仮定が無仮定に近いかを判断して評価する。

## 4. 研究成果

(1) 三角格子反強磁性 XY 模型のカイラル転移と KT 転移の転移温度の違いによる逐次相転移の確認と、カイラル転移の普遍性クラスが同じ2回対象のイジング模型とは異なることを、精密に議論し結論した。

(2) 磁場中三角格子反強磁性ハイゼンベルグ模型において議論が収束していない、高磁場側の相転移描像を確立するために、動的スケーリング解析を実施した。動的秩序変数を慎重に選択し、

これまでの議論に現れなかった新たな描像を観測し、臨界普遍性の解析まで行った。

(3) Event-chain 法と呼ばれる大域更新のモンテカルロアルゴリズムを非平衡緩和法に適用可能性を検証し、動的秩序変数に要求される条件や、サイズ依存性を排除するための条件を詳らかにした。臨界指数を精密に決定する「ゆらぎの緩和」の実効性も検証し、概ね良好な結論が得られた。

(4) ネットワーク上のパーコレーション系において、通常有限サイズスケールングとは異なる、サイズに依存しないスケールング解析を開発し、転移濃度と臨界指数の評価法を確立した。さらに、パラメーターに依存しない外挿法を確立し、より信頼性の高い指数の決定を可能にした。厳密解のあるモデルで高精度な評価が可能であることを確認し、既存の有限サイズスケールングの結果の問題点を見出した。特異な臨界指数を持つある種のパーコレーションモデルにおいては通常スケールング解析に困難が生じるが、臨界指数が非常に小さく、急激な発散を伴う系におけるこれまでの評価を刷新する可能性のある結果を提示することができた。

(5) 3次元イジングスピングラスモデルに動的スケールング解析を適用し、温度対不純物濃度面の相図を精密に決定した。ビンダー比による臨界指数  $\nu$  の外挿に成功し、精度の良い臨界指数の決定が可能になった。スピングラス相境界に沿ってスピングラス臨界指数が普遍性を示され、濃度-温度相図における普遍性クラスの構造が明らかになった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kenta Hagiwara and Yukiyasu Ozeki	4. 巻 106
2. 論文標題 Size-independent scaling analysis for explosive percolation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 PHYSICAL REVIEW E	6. 最初と最後の頁 54138
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevE.106.054138	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yukiyasu Ozeki and Kenta Hagiwara	4. 巻 1
2. 論文標題 New scaling analysis for graph percolations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Activity Report 2021, ISSP	6. 最初と最後の頁 218-219
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yukiyasu Ozeki and Yuma Osada	4. 巻 1
2. 論文標題 Study on relaxations of fluctuation with the event-chain algorithm	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Activity Report 2020, ISSP	6. 最初と最後の頁 258-259
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuaki Murayama and Yukiyasu Ozeki	4. 巻 101
2. 論文標題 Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 184427
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevB.101.184427	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukiyasu Ozeki and Yuma Osada	4. 巻 1
2. 論文標題 Event-chain Monte Carlo method applied to non-equilibrium relaxation analysis	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Activity Report 2019, ISSP	6. 最初と最後の頁 254-255
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ozeki Yukiyasu, Yajima Yuri, Nakamura Yuka	4. 巻 101
2. 論文標題 Dynamical scaling analysis on critical universality class for fully frustrated XY models in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 94437
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.101.094437	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukiyasu Ozeki and Kazuaki Murayama	4. 巻 1
2. 論文標題 Nonequilibrium relaxation analysis for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Activity Report 2018, ISSP	6. 最初と最後の頁 221-221
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 長田優馬、尾関之康
2. 発表標題 カウス過程回帰によるゆらぎの緩和解析の臨界指数評価
3. 学会等名 日本物理学会, 2022年秋季大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長田優馬、尾関之康
2. 発表標題 ガウス過程回帰による非平衡緩和解析の改良
3. 学会等名 日本物理学会, 2023年春季大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 秋原健太、尾関之康
2. 発表標題 Explosive Percolation の臨界指数のさらなる評価
3. 学会等名 日本物理学会, 2021年秋季大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長田優馬、尾関之康
2. 発表標題 KT転移系へのevent-chain 法の適用におけるサイズ効果
3. 学会等名 日本物理学会, 2021年秋季大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺澤雄介、尾関之康
2. 発表標題 改良された動的スケーリング解析による3次元イジングスピングラスの相図と臨界現象
3. 学会等名 日本物理学会, 第77回年次大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長田優馬、尾関之康
2. 発表標題 Event-chain法による動的臨界指数の比較
3. 学会等名 日本物理学会, 2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 萩原健太、尾関之康
2. 発表標題 非平衡緩和法によるExplosive Percolationモデルのスケーリング解析
3. 学会等名 日本物理学会, 2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長田優馬、尾関之康
2. 発表標題 event-chain 法を適用した連続スピン系における ゆらぎの緩和の振る舞い
3. 学会等名 日本物理学会, 第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 萩原健太、尾関之康
2. 発表標題 Explosive Percolation の臨界指数評価
3. 学会等名 日本物理学会, 第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 村山一明、尾関之康
2. 発表標題 磁場中反強磁性三角格子Heisenberg模型における対称性の破れの非平衡緩和解析
3. 学会等名 日本物理学会 2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長田優馬, 尾関之康, 中村有花
2. 発表標題 Event-chain法による非平衡緩和解析の有効性
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 村山一明, 尾関之康
2. 発表標題 磁場中反強磁性三角格子Heisenberg 模型における対称性の破れの非平衡緩和解析II
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------