

令和 5 年 5 月 1 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03667

研究課題名(和文) 新しいタイプの直交多項式の性質と解ける量子力学モデルの拡張

研究課題名(英文) Properties of new types of orthogonal polynomials and extensions of exactly solvable quantum mechanical systems

研究代表者

小竹 悟 (Odake, Satoru)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：40252051

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：次数に欠落があるにも拘らず完全系を成す新しいタイプの直交多項式である多添字直交多項式を量子力学モデルの可積分変形を用いて構成して来たが、残されていた連続ハーン多項式に対してケース-(1)の多添字直交多項式を構成した。そして通常の直交多項式の特徴付けである3項関係式に代わる再帰関係式を得て、生成消滅演算子を構成した。量子力学モデルの可積分変形を与えるダルブー変換にはロンスキアンやカソラティアンが現れるが、カソラティアンの一般的な恒等式を示した。これらの研究で得た直交多項式の知見を活かして、直交多項式の重み関数の畳み込みを用いた解けるマルコフ連鎖の構成も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

直交多項式の理論は数学の一分野であるが、水素原子の量子力学に見られる様に物理学において重要な役割を果たしているだけでなく、工学などの様々な分野にも現れている。次数に欠落があるにも拘らず完全系を成す新しいタイプの直交多項式である多添字直交多項式が近年勢力的に調べられている。本研究では量子力学モデルの可積分変形を利用して多添字直交多項式を構成し、その性質として再帰関係式を見出し、生成消滅演算子を構成した。また、直交多項式を利用して解けるマルコフ連鎖の構成も行った。これらは直交多項式及びその周辺の話題に新しい知見をもたらした。

研究成果の概要(英文)：We have constructed a new type of orthogonal polynomials, the multi-indexed orthogonal polynomials, which form a complete set in spite of missing degrees, using integrable deformations of quantum mechanical models, and constructed the case-(1) multi-indexed orthogonal polynomials for the remaining continuous Hahn polynomial. Then, instead of the three term recurrence relations that characterize the ordinary orthogonal polynomials, we obtained appropriate recurrence relations and constructed creation/annihilation operators. The Wronskian and Casoratian appear in the Darboux transformations that give integrable deformations of quantum mechanical models, and we showed the general identities for the Casoratian. Taking advantage of the knowledge of orthogonal polynomials obtained in these studies, we also constructed solvable Markov chains using the convolution of the weight functions of the orthogonal polynomials.

研究分野：数理物理学

キーワード：例外・多添字直交多項式 解ける量子力学モデル 離散量子力学 再帰関係式 ダルブー変換 ロンスキアン・カソラティアン 自由振動子表示 マルコフ連鎖

### 1. 研究開始当初の背景

次数に欠落があるにも拘らず完全系をなし、2階の微分方程式または差分方程式を満たす新しいタイプの直交多項式(例外直交多項式, 多添字直交多項式)は、2008年の発見以降、解ける量子力学模型との関連で数学者・物理学者によって精力的に研究されてきた。これは直交多項式及び解ける量子力学模型にとって大きな進展であり、更に研究を推し進める事が望まれていた。

### 2. 研究の目的

多添字直交多項式という新しいタイプの直交多項式の性質の解明や解ける模型の拡張を更に推し進め、これらの新しい知見を得る事が目的である。性質の中で再帰関係式は応用上も大切な情報なので、特に再帰関係式の性質の解明に重点を置く。多添字多項式の構成では、きれいな性質を持つケース-(1)の多項式が興味深く、これまで構成されていない多項式に対してケース-(1)の多項式の構成が可能かどうかを明らかにする。また、多自由度への拡張を目指したい。

### 3. 研究の方法

再帰関係式として変数係数と定数係数の2種類を得ているが、双スペクトル性など応用上は定数係数のものが重要となるので、ケース-(1)の多添字直交多項式に対して定数係数再帰関係式を考える。ラゲール、ヤコビ、(アスキー)ウィルソン、(q-)ラカーの場合には、うまい多項式  $X$  を多添字直交多項式に掛けると定数係数再帰関係式が得られる事が分かっている。添字集合  $D$  が簡単な場合に対して、小さい次数  $n$  に対して再帰関係式をコンピュータを用いて計算し、その結果から一般の  $n$  に対する再帰関係式を予想し、確認する。解ける量子力学模型から新しい解ける量子力学模型を得る方法としてダルブー変換があり、その種関数として仮想状態という特別な解を用いると、ケース-(1)の多添字直交多項式を得る事が出来る。これまでに研究されていない多項式を基にして、ケース-(1)の多添字直交多項式の構成が可能かどうかを、仮想状態を手掛かりにして調べる。

### 4. 研究成果

#### (1) 新しい多添字直交多項式と解ける量子力学模型の構成

ケース-(1)の多添字直交多項式は、ラゲール、ヤコビ、ウィルソン、アスキー・ウィルソン、ラカー、q-ラカーに対して構成されていた。通常の量子力学模型で座標が実数全体を動くエルミート多項式の場合には、パラメータを持たないためケース-(1)の多添字直交多項式が存在しなかった。これに対応する、座標が実数全体を動く虚数シフトの離散量子力学模型で連続ハーン多項式やマイクスナー・ポラチェック多項式の場合にケース-(1)の多添字直交多項式が存在するかどうかは疑問として残されていた。今回、連続ハーン多項式とマイクスナー・ポラチェック多項式に対して、ケース-(1)の多添字直交多項式及び解ける虚数シフトの離散量子力学模型を構成する事が出来た[論文①]。パラメータをツイストして仮想状態を構成するという方針は(アスキー・)ウィルソンの場合と同様だが、ダルブー変換の中間状態においてハミルトニアン $H$ のエルミート性が必ずしも成り立たない点が異なっている。得られた模型にも形状不変性がある。

#### (2) 多添字直交多項式の性質と解ける量子力学模型の性質

通常の直交多項式の特徴付けとして3項関係式があるが、多添字直交多項式は通常の直交多項式ではないため3項関係式を満たさず、より項数の多い再帰関係式を満たしている。再帰関係式には変数係数と定数係数の2種類がある。前者は多添字直交多項式がダルブー変換を用いて得られる事から導かれ、後者はうまい多項式を掛ける事によって得られる事が、ラゲール、ヤコビ、(アスキー・)ウィルソン、(q-)ラカーの多添字直交多項式に対して示されていた。今回、連続ハーンとマイクスナー・ポラチェックの多添字直交多項式を構成したので[論文①]、その再帰関係式について調べ、これまでと同様に2種類の再帰関係式を得る事が出来た[論文②]。また、この多添字直交多項式で固有状態が記述される虚数シフトの離散量子力学模型において、一般化された閉関係式が成り立つ事を示し、生成消滅演算子を構成する事が出来た[論文②]。

#### (3) ロンスキアンとカソラティアンの性質

量子力学模型の可積分変形を与えるダルブー変換にはロンスキアンやカソラティアンが現れるが、模型の変形においてそれらの性質が用いられている。そこで用いられるロンスキアンの性質を一般化した恒等式がロンスキアンに存在している事を知ったので、同様な恒等式がカソラティアンにもあるであろうと予想して、実際に恒等式を証明した[論文③]。そしてこれらの恒等式を量子力学模型の可積分変形に応用した[論文③]。

#### (4) ラゲール多項式の自由振動子表示

自由振動子は、エルミート多項式で記述される調和振動子の生成消滅演算子である。動径振動子の固有状態はラゲール多項式で記述されるが、自由振動子を用いて、調和振動子の固有状態を動径振動子の固有状態へ写す演算子(及び逆向きの写像を与える演算子)を具体的に構成した[論文④]。これから、ラゲール多項式をエルミート多項式の線型結合で表す式(及びエルミート多項式をラゲール多項式の線型結合で表す式)が得られる。

#### (5) 直交多項式の重み関数の畳み込みを用いた解けるマルコフ連鎖

出生死滅過程では直交多項式を利用して解ける模型が作られているが、マルコフ連鎖でも直交多項式を利用した解ける模型が以前から作られている。実数シフトの離散量子力学模型に現れる直交多項式の重み関数の“畳み込み”(畳み込みの変形版)を利用して、固有関数が直交多項式で与えられる遷移確率行列を構成した[論文⑤]。その固有値は超幾何級数と関連している。

#### (6) 投稿中の論文

投稿中の論文として、虚数シフトの離散量子力学模型に現れる多添字直交多項式の零点を用いた離散直交関係を示した研究[論文⑥] (これは掲載が決定した)、実数シフトの離散量子力学模型に現れる有限型の直交多項式の因子化を示した研究[論文⑦]、それを用いた状態追加のダルブー変換を調べた研究[論文⑧]、別のタイプの前進後進シフト関係式を調べた研究[論文⑨]がある。

#### 発表論文等

##### [雑誌論文]

- ① Satoru Odake, “Exactly Solvable Discrete Quantum Mechanical Systems and Multi-indexed Orthogonal Polynomials of the Continuous Hahn and Meixner-Pollaczek Types,” Prog. Theor. Exp. Phys. **2019** (2019) 123A01 (20pp). 査読有  
DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptz124>
- ② Satoru Odake, “Recurrence Relations of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials VI : Meixner-Pollaczek and continuous Hahn types,” J. Math. Phys. **61** (2020) 053505 (25pp). 査読有  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5144338>
- ③ Satoru Odake, “Wronskian/Casoratian Identities and their Application to Quantum Mechanical Systems,” J. Phys. A: Math. Theor. **53** (2020) 365202 (21pp). 査読有  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aba0ef>
- ④ Satoru Odake, “Free Oscillator Realization of Laguerre Polynomial,” Theor. Math. Phys. **210** (2022) 1-7. 査読有  
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577922010019>
- ⑤ Satoru Odake and Ryu Sasaki, “Markov Chains Generated by Convolutions of Orthogonality Measures,” J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022) 275201 (42pp). 査読有  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac736a>
- ⑥ Satoru Odake, “Discrete Orthogonality Relations for the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials in Discrete Quantum Mechanics with Pure Imaginary Shifts,” J. Math. Phys. に掲載決定
- ⑦ Satoru Odake and Ryu Sasaki, ““Diophantine” and Factorisation Properties of Finite Orthogonal,” 投稿中
- ⑧ Satoru Odake, “New Finite Type Multi-Indexed Orthogonal Polynomials Obtained From State-Adding Darboux Transformations,” 投稿中
- ⑨ Satoru Odake, “Another Type of Forward and Backward Shift Relations for Orthogonal Polynomials in the Askey Scheme,” 投稿中

##### [学会発表]

- ① 小竹悟, 新しい解ける離散量子力学模型と多添字連続 Hahn 直交多項式, 日本物理学会 2019 年秋季大会, 2019.9.18, 山形
- ② 小竹悟, 多添字 Meixner-Pollaczek・連続 Hahn 直交多項式の再帰関係式と生成消滅演算子, 日本物理学会第 75 回年次大会, 2020.3.16, 名古屋 (発表成立)
- ③ 小竹悟, ロンスキアン・カソラティアン恒等式とその量子力学模型への応用, 日本物理学会 2020 年秋季大会, 2020.9.16, オンライン
- ④ 小竹悟, ラゲール多項式の自由振動子表示, 日本物理学会第 76 回年次大会, 2021.3.12,

オンライン

- ⑤ 小竹悟, 佐々木隆, 直交多項式の測度の畳み込みで構成される解けるマルコフ連鎖, 日本物理学会 2021 年秋季大会, 2021. 9. 17, オンライン
- ⑥ 小竹悟, 虚数シフトの離散量子力学に現れる多添字直交多項式の離散直交性, 日本物理学会第 77 回年次大会, 2022. 3. 16, オンライン
- ⑦ 小竹悟, 状態追加のダルブー変換で得られる新しい有限型が多添字直交多項式, 日本物理学会 2023 年春季大会, 2023. 3. 25, オンライン

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Odake S.	4. 巻 210
2. 論文標題 Free oscillator realization of Laguerre polynomials	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1~7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1134/S0040577922010019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Odake Satoru	4. 巻 61
2. 論文標題 Recurrence relations of the multi-indexed orthogonal polynomials VI : Meixner-Pollaczek and continuous Hahn types	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 053505 ~ 053505
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5144338	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Odake Satoru	4. 巻 53
2. 論文標題 Wronskian/Casoratian identities and their application to quantum mechanical systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 365202 ~ 365202
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aba0ef	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Odake Satoru	4. 巻 2019
2. 論文標題 Exactly solvable discrete quantum mechanical systems and multi-indexed orthogonal polynomials of the continuous Hahn and Meixner-Pollaczek types	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/ptep/ptz124	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Odake Satoru, Sasaki Ryu	4. 巻 55
2. 論文標題 Markov chains generated by convolutions of orthogonality measures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 275201 ~ 275201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac736a	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 小竹悟, 佐々木隆
2. 発表標題 直交多項式の測度の畳み込みで構成される解けるマルコフ連鎖
3. 学会等名 日本物理学会2021年秋季大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 虚数シフトの離散量子力学に現れる多添字直交多項式の離散直交性
3. 学会等名 日本物理学会第77回年次大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 ロンスキアン・カソラティアン恒等式とその量子力学模型への応用
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 ラグール多項式の自由振動子表示
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 新しい解ける離散量子力学模型と多添字連続Hahn直交多項式
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 多添字Meixner-Pollaczek・連続Hahn直交多項式の再帰関係式と生成消滅演算子
3. 学会等名 日本物理学会第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小竹悟
2. 発表標題 状態追加のグループ変換で得られる新しい有限型の多添字直交多項式
3. 学会等名 日本物理学会2023年春季大会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Recent Papers  
<https://azusa.shinshu-u.ac.jp/~odake/paper.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------