

令和 6 年 5 月 26 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03877

研究課題名（和文）ブラックホール時空の可積分性とキリング・矢野対称性

研究課題名（英文）Integrability of black hole spacetime and Killing-Yano symmetry

研究代表者

安井 幸則（Yasui, Yukinori）

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：30191117

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：キリング・矢野対称性は時空の隠れた対称性とも呼ばれ、ブラックホール時空の一意性や場の方程式の変数分離性など、ブラックホール時空の可積分な構造を統一的に理解することが可能となる。本研究では、この対称性を高次元ブラックホール時空に拡張し、マックスウェル方程式や重力の摂動方程式における変数分離性を幾何学的手法を用いて解明する。高次元ブラックホール時空にキリング・矢野テンソルを用いて対称演算子を構成し、方程式の変数分離性を示すとともに、数値計算を使って時空の安定性解析を行った。この成果は、対称性の視点からブラックホール時空の理解を深め、今後の研究に向けて重要な一歩を踏み出すものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

キリング・矢野対称性は、ウォーカーとペンローズが1970年に4次元カー・ブラックホール時空の対称性として発見した。また、この対称性を純粋に数学的視点から導入したのは、1968年の柏田と立花による幾何学者の研究に遡る。20世紀後半になって、超弦理論や超重力理論などの重力を含む統一理論への関心が高次元ブラックホール時空の研究への大きな動機付けを与えた。そして、本研究によって高次元ブラックホール時空にもキリング・矢野対称性を拡張できることが明らかになった。特に、高次元ブラックホール時空の重力摂動方程式が変数分離できるかどうかは長年にわたる未解決問題であり、本研究はその解明への重要なヒントを提供する。

研究成果の概要（英文）：The Killing-Yano symmetry is also referred to as the hidden symmetry of spacetime. It allows for a unified understanding of the integrable structure of black hole spacetimes, such as the uniqueness of black hole spacetimes and the separability of variables in field equations. In this study, we have extended this symmetry to higher-dimensional black hole spacetimes and attempted to elucidate the separability of variables in Maxwell's equations and gravitational perturbation equations using geometric methods. By constructing symmetry operators using Killing-Yano tensors in higher-dimensional black hole spacetimes, we demonstrated the separability of the equations and conducted a stability analysis of spacetime using numerical calculations. This achievement represents an important step forward in deepening our understanding of black hole spacetimes from the perspective of symmetry and paves the way for future research.

研究分野：重力理論

キーワード：キリング・矢野対称性 重力の摂動論 変数分離性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) カー・ブラックホール時空中での摂動方程式の研究は、重力波の解析や時空の安定性の解析において重要な役割を果たす。基本となるのは、チューコルスキー方程式と呼ばれるスカラー場の方程式である。曲がった時空中でのマクスウェル方程式や重力摂動方程式は、テンソル成分が相互に結合した複雑な形になり、解析が難しくなる。しかし、カー・ブラックホール時空中では、摂動方程式が1つのスカラー場(ヘルツポテンシャル)の方程式に還元され、変数分離が可能という顕著な特性を持つ。

(2) 2000年代に入り、超弦理論や超重力理論に触発された高次元ブラックホール時空の研究が盛んになった。このような流れの中で、カー時空は高次元ブラックホール時空に拡張され、クライン・ゴードン方程式、ディラック方程式、マクスウェル方程式など摂動方程式の変数分離性が示された。

### 2. 研究の目的

(1) ブラックホール時空中にはキリング・矢野対称性と呼ばれる時空の隠れた対称性が存在する。キリングベクトルを高階のテンソルに拡張した共形キリング・矢野テンソルによって記述される対称性である。本研究は、ブラックホール時空中の摂動方程式に現れる可積分構造をキリング・矢野対称性を用いて解明することを目的とする。特に、高次元ブラックホール時空の重力摂動方程式が変数分離するかどうかは、ここ20年の未解決問題であり、この問題に対し対称性の視点からアプローチすることで、新たな解法の可能性を探る。本研究によって、高次元ブラックホール時空中における重力摂動方程式の変数分離の問題に新たな光を当て、ブラックホール時空の基本的な理解を深めることを目的とする。

(2) コンパクトなアインシュタイン多様体に関する研究は、幾何学の分野で長年にわたり重視されてきた課題である。本研究では、高次元ブラックホール時空のウィック回転を利用し、アインシュタイン多様体を体系的に構築する。ブラックホールの研究が幾何学の問題解決に新たな視点をもたらすことは、非常に興味深い展開である。ブラックホールの特異な性質が、時空のトポロジーと幾何学的構造の理解に貢献すると期待できる。この研究では、ブラックホールのこれらの性質を活用し、アインシュタイン多様体の新しいクラスを構築し、それが超弦理論のコンパクト化にどのように寄与するかを探る。このアプローチは、幾何学の古典的な問題に対して革新的な解決策を提供する可能性がある。

### 3. 研究の方法

Kerr-NUT-AdS時空は、キリング・矢野対称性を許す最も一般的な高次元ブラックホール時空であることが証明されている。その詳細については、2011年に我々が執筆したレビュー論文“Hidden Symmetry and Exact Solutions in Einstein Gravity”がある。この基盤となる結果を活用し、ブラックホール時空の可積分構造やアインシュタイン多様体への応用に関する研究を進める。以下に、そのための具体的な方法を示す。

(1) ブラックホール時空の可積分構造の解析:

Kerr-NUT-AdS時空における可積分構造を数学的に定義し、その物理的意味を探求する。

この構造がブラックホールのダイナミクスにどのように影響を与えるかを調査する。

(2) アインシュタイン多様体への応用:

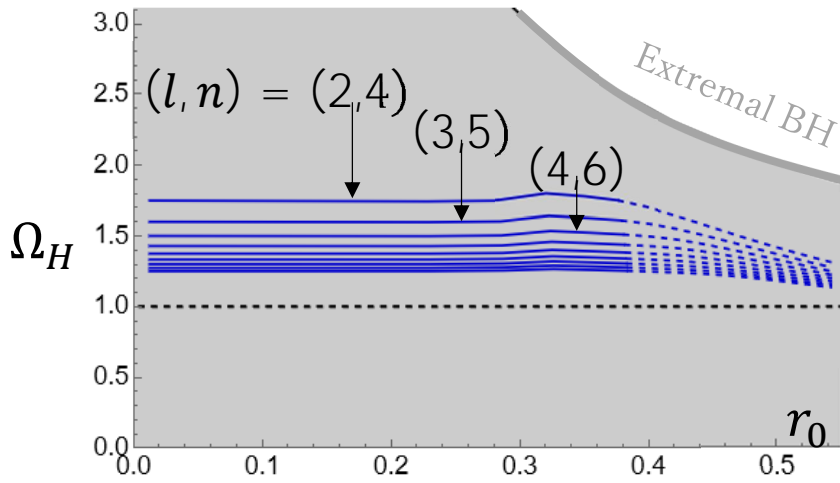
得られた可積分構造をアインシュタイン方程式の解析に応用し、新たな解の発見を目指す。

### 4. 研究成果

(1) 4次元Kerr-AdS時空中でワルドの4つ組と呼ばれる演算子(E, S, O, T)を構成した。この演算子は交換関係SE=OTをみたし、チューコルスキー方程式の解から摂動方程式の解への写像を与える。本研究では、ワルドの演算子が一般化されたキリング・矢野テンソルを使って座標に依存しない形で表現出来ることを示した。さらに、4次元Kerr-AdS時空から誘導されるコンパクトなアインシュタイン計量(Page計量)の剛性をワルドの4つ組を使って証明した。

(2) 高次元Kerr-NUT-AdS時空中のマクスウェル方程式について、共形キリング・矢野テンソルを使って対称演算時を構成し、方程式の変数分離性を幾何学的な視点から明らかにした。

(3) 高次元Kerr-NUT-AdS時空の重力摂動方程式が角運動量を部分的に揃えることにより、変数分離方程式に帰着することを示した。また、変数分離方程式を数値的に解くことにより、時空の不安定性(superradiant instability)の存在を示した(下図の灰色領域)。



(4) 正のスカラール曲率を持つコンパクトなアインシュタイン多様体の知られている例はそれほど多くない。最初の非等質な例は Page(1978)によって  $CP(1)$  上の球面束に構成された 4 次元アインシュタイン計量である。本研究では高次元ブラックホール解を解析接続することにより非等質でコンパクトなアインシュタイン多様体を組織的に構成する方法を見つけた。具体的な構成方法は次のようになる：底空間  $B$  を第 1 チャーン類が正の整数  $p$  で与えられるコンパクトなケーラー多様体とする。また、 $n$  個の整数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  でラベルされた  $B$  上の  $n$  次元トーラス束に同伴する偶数次元の球面束を  $M_n(B)$ 、奇数次元の球面束を  $N_n(B)$  とする。この設定で次の定理が成り立つ。

**定理 1**  $k_1, k_2, \dots, k_n$  を  $0 < k_1 + k_2 + \dots + k_n < p$  を満たす正の整数とする。このとき  $M_n(B)$  は正のスカラール曲率を持つアインシュタイン計量を許す。

**定理 2**  $k_1, k_2, \dots, k_n$  を正の整数とする。このとき  $N_n(B)$  は正のスカラール曲率を持つアインシュタイン計量を許す。特に、 $k_1 + k_2 + \dots + k_n = p$  のとき  $N_n(B)$  に佐々木・アインシュタイン計量が入る。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Gray Finnian, Houry Tsuyoshi, Kubiznak David, Yasui Yukinori	4. 巻 104
2. 論文標題 Symmetry operators for the conformal wave equation in rotating black hole spacetimes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 84042
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevD.104.084042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Houry, N.Tanahashi, Y.Yasui	4. 巻 85
2. 論文標題 Separability of Maxwell equation in rotating black hole spacetime and its geometric aspects	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 407-416
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08510407	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Houry Tsuyoshi, Tanahashi Norihiro, Yasui Yukinori	4. 巻 37
2. 論文標題 Hidden symmetry and the separability of the Maxwell equation on the Wahlquist spacetime	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 075005 ~ 075005
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6382/ab6e8a	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Houry Tsuyoshi, Tanahashi Norihiro, Yasui Yukinori	4. 巻 37
2. 論文標題 On symmetry operators for the Maxwell equation on the Kerr-NUT-(A)dS spacetime	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 015011 ~ 015011
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6382/ab586d	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 宝利剛 棚橋典大 安井幸則
2. 発表標題 非等角運動量Myers-Perryブラックホールの重力摂動の新たな変数分離法
3. 学会等名 日本物理学会 2022年秋季大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 安井幸則
2. 発表標題 Teukolsky 方程式とKilling-Yano対称性
3. 学会等名 The 5th workshop on Mathematics and Physics in General Relativity (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 安井幸則
2. 発表標題 Generalized Kerr-NUT-AdS 時空と重力摂動
3. 学会等名 第22回特異点と時空および関連する物理
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 安井幸則
2. 発表標題 Generalized Kerr-NUT-AdS 時空と重力摂動
3. 学会等名 相対論と重力研究の現在、過去、未来 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 安井幸則
2. 発表標題 時空の隠れた対称性
3. 学会等名 名古屋大学物理教室QG研夏の学校（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 安井幸則
2. 発表標題 アインシュタイン計量とブラックホールの対称性
3. 学会等名 大阪市立大学新たな大学院教育の展開のためのFD研修会-宇宙・ブラックホールと数学（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 安藤正樹, 白水徹也 他	4. 発行年 2020年
2. 出版社 朝倉書店	5. 総ページ数 432
3. 書名 相対論と宇宙の事典	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

カナダ	Perimeter Institute			
-----	---------------------	--	--	--