

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K11818

研究課題名(和文) グラフセパレータの代数的構造の研究

研究課題名(英文) Study on the Algebraic Structure of Graph Separators

研究代表者

山崎 浩一 (Yamazaki, Koichi)

東京電機大学・理工学部・教授

研究者番号：00246662

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：得られた成果は以下となる：(1) セパレータの集合がなす束に対してガロア接続や閉包作用素の解釈を与えた。(2) 近年注目されているk-creatureと呼ばれるグラフ構造に対して、それと親和性のある束構造を導入することで、一見無関係に見えるセパレータの既知の結果と概念束の既知の結果が、本質的に等しいことを示した。(3) 最近発見されたt-critterと呼ばれるグラフ構造を束構造の観点から検証し、k-creatureとt-critterの違いを明確にした。(4) t-critterがセパレータを生成する仕組みを束視点から考察し、その仕組みの工学的な応用例を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフセパレータの研究は、我々の生活や暮らしに間接的ながらも豊かさをもたらしている。例えば、スマートフォンやATM、交通網、インターネットなどのインフラにおいて半導体は不可欠である。またAI技術も我々の暮らしや仕事に浸透してきている。

次世代の半導体では3次元化が研究されており、部品の階層化や分割が問題となっている。また、AIの学習においても、データのクラスタリング(グループ分け)が重要である。これらの問題は、分割・分離、つまりセパレータする問題であり、グラフセパレータの問題として数理モデル化できる。グラフセパレータの知見は、間接的ではあるが、工学的・社会的な問題に対して役立っている。

研究成果の概要(英文)：The obtained results are as follows: (1) We provided interpretations of Galois connections and closure operators for the lattices formed by the set of separators. (2) By introducing lattice structures that are compatible with k-creatures, a graph structure that has recently gained attention, we demonstrated the inherent equivalence between known results of separators and concept lattices that may appear unrelated at first glance. (3) We examined the recently discovered graph structure called t-critter from the perspective of lattice structures and clarified the differences between k-creatures and t-critters. (4) We explored the mechanism of how t-critters generate separators from a lattice viewpoint and provided examples of their engineering applications.

研究分野：計算機科学

キーワード：グラフ セパレータ 束

1. 研究開始当初の背景

当初の背景として、下記の二つの点が重要であった。一つは、束構造視点の欠如である。グラフ G とその非隣接頂点 a, b に対し、 G のある頂点集合 S を (G から) 削除することにより a と b が分離できるとき、 S は a, b セパレータと呼ばれる。 a, b を固定して得られる極小な a, b セパレータからなる集合は、束をなすことが知られている。極小 a, b セパレータは古くから研究されており、多くの知見や研究成果が得られている。しかしながらその多くは、グラフ構造の視点から得られるもので、それと比較すると束構造の視点から得られた知見や研究成果は多いとは言い難い状況であった。

もう一つは、一部研究者(参考文献 1,3~5)による小ブームである。開始当時奇しくも、幾つかの研究グループによって、極小 a, b セパレータを多く持つ(指数個)グラフ(クラス)の特徴付けが精力的に研究されていた。それにより幾つかの有益な研究成果が得られ確かに進展はあったが、それらの研究成果はグラフ構造の知見やアルゴリズム手法を駆使して得られたものが多く、束構造を活かした研究はほとんど見られない状況であった。

2. 研究の目的

上述した背景のもと、束構造に着目した極小 a, b セパレータの研究に興味を持った。研究の対象(すなわち極小 a, b セパレータ)が複数の側面(すなわちグラフ構造と束構造)から研究できるにもかかわらず、ある特定の側面(すなわちグラフ構造)からのみで研究が行われていることに違和感も持っていた。このような考え・動機から、「極小 a, b セパレータの束構造を詳しく調べること」、および「そこから得られる知見を活用して極小 a, b セパレータを多く持つグラフ(クラス)の特徴付けること」を直接的な研究目的とした。この直接的な目的から派生する研究課題として、ある意味それぞれ独立して行われてきた「グラフ構造視点での研究」と「束構造視点での研究」を融合することも重要である。広い意味でこの融合も目的に含まれている。

3. 研究の方法

基本的な方法論としては、それぞれ独立に進んできた「グラフ構造視点の研究」と「束構造視点の研究」の共通点と差分を考察する。共通部分に関しては、それぞれの視点で用いられている、用語、概念、手法などのマッチングを行う。差分に関しては、片側のみ展開されている研究をもう片側に展開する。分野が異なる(すなわちグラフアルゴリズム分野と束論などの代数分野の)研究者では、本質的に同じ研究テーマや同じ研究手法(すなわち共通部分)であっても、そこで使われている用語や説明の仕方が異なる。このようなときにマッチングが重要となる。片側の視点のみで展開されている研究は、解釈をし直すことで別のもう片側の視点で展開可能である。

研究の進め方としては、(1)束構造の研究でよく用いられる概念・手法をグラフ構造の視点で解釈し直し、グラフ構造として展開する。またその逆に対しても展開を試みる。(2)上述した幾つかの研究グループにより展開されている、極小 a, b セパレータを多く持つ(指数個)グラフ(クラス)の特徴付けに対し(それは主にグラフ構造の視点から研究されているが)、その特徴付けを束構造視点のもとで解釈し直す。

4. 研究成果

並行関係にある二つの極小 a, b セパレータ S_1, S_2 に対し、「 S_1 と S_2 の間に位置する他の極小 a, b セパレータの個数」と「 S_1 と S_2 から構成される二部グラフの最大誘導マッチング数」の関係を明らかにすることが、計画時の初期の目標であった。研究を進める中で、「並行関係にある」という条件を「隣接する」に緩和することで、当初の目標に近い結果が得られた。以下では、この詳細について説明する。

まず条件の緩和であるが、上述した幾つかの研究グループが注目していた k -creature(参考文献 1,3~5)と呼ばれるグラフ構造において、「隣接した二つの極小 a, b セパレータ」(以下、AMS と呼ぶ)が、 k -creature と極めて高い親和性を持ち、なおかつ形式概念束の議論がしやすいグラフ構造であることに気付いた。AMS に着目することで研究が進み、その意味でも AMS を提唱し導入したことは一つの研究成果と言える(学会発表 2023)。

AMS の導入で、「二部グラフの最大誘導マッチング数との関係」を含む、幾つかの研究成果が得られたが、それについて述べるために、「グラフセパレータに対する閉包作用素やガロア接続」に関する成果について述べる。

閉包作用素やガロア接続は束構造でよく使われる概念・手法であるが、それに対応するものがグラフ構造での議論の中に存在するかどうかは、研究を始めた当初は不明であった。しかし研究を進める中で、古くから知られていた極小 a, b セパレータの構築方法を束構造視点で眺めてみると、その構築方法は閉包作用素やガロア接続を用いて自然に解釈できることに気付いた。これも成果の一つと言える(学会発表 2022)。

上述した、「 k -creature と形式概念束の両方に親和性を持つ AMS の導入」と「グラフセパレータに対する閉包作用素やガロア接続」の知見から、 k -creature に関するある研究結果(文献 1 の定理 1.5)とこれとは別の形式概念束に関する研究結果(文献 2 の定理 8)が本質的に等しいことを示した(論文投稿中)。具体的には、 k -creature を少し緩和した構造(それはあるサイズの誘導マッチングを内包している)を部分構造として持つグラフは指数個のセパレータを持つことが知られており(文献 1 の定理 1.5)、これとは別に *contranominal scale* と呼ばれる構造を持たない形式概念束が指数サイズになることも知られていた(文献 2 の定理 8)。この両者が本質的に等しいことを示した。両者の等価関係は、「形式概念束の "概念" に当たるものは完全二部グラフというグラフ構造で、完全二部グラフから誘導マッチングを除去することで、*contranominal scale* と呼ばれる構造が得られる」という関係に基づいている。形式概念束では閉包作用素やガロア接続での議論の展開は容易で、それらを用いて等価性を証明した。

他の研究成果としては、上述した幾つかの研究グループの一つが、ごく最近 k -creature とは異なる t -critter と呼ばれる構造を導入した(文献 4)。この t -critter に対する束構造を考察し、セパレータの生成メカニズムが k -creature とは異なることを、束構造の観点から示した(学会発表 2023)。より詳しく説明すると、 k -creature ではセパレータを生成する際にアトムのみを基にしているが、 t -critter ではアトム以外の既約元も持っており、それらを基にしてセパレータを生成する。この生成メカニズムの違いを理解することで、以下の工学的な応用を得ることができた：古くからグラフ文法と呼ばれる生成規則に基づいてグラフの集合(グラフ言語)を生成する研究が行われており、その中には NLC グラフ文法というタイプの文法がある。NLC は、限られた生成能力を持つ「線形 apex NLC」や、より高い生成能力を持つ「Boundary NLC」といったより細かいタイプに細分できる。Boundary NLC は k -creature の生成メカニズムを模倣することができるが、線形 apex NLC は模倣することができない。しかし、線形 apex NLC でも t -critter の生成メカニズムであれば模倣できることを示した(学会発表 2023)。

引用文献

1. Abrishami, Tara, et al. "Graphs with polynomially many minimal separators." *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 152 (2022): 248-280.
2. Albano, Alexandre, and Bogdan Chornomaz. "Why concept lattices are large: extremal theory for generators, concepts, and VC-dimension." *International Journal of General Systems* 46.5 (2017): 440-457.
3. Gartland, Peter, and Daniel Lokshtanov. "Graph Classes with Few Minimal Separators. I. Finite Forbidden Induced Subgraphs." *Proceedings of the 2023 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2023.
4. Gartland, Peter, and Daniel Lokshtanov. "Graph Classes with Few Minimal Separators. II. A Dichotomy." *Proceedings of the 2023 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2023.
5. Milanič, Martin, and Nevena Pivač. "Polynomially bounding the number of minimal separators in graphs: Reductions, sufficient conditions, and a dichotomy theorem." *The Electronic Journal of Combinatorics* (2021): P1-41.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 野村幸平、山崎浩一
2. 発表標題 互いに支配する極小 a, b -セパレータの分布について
3. 学会等名 LAシンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山崎 浩一
2. 発表標題 ガロア接続と極小セパレータ
3. 学会等名 2021 年度冬の LA シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山崎浩一
2. 発表標題 極小 ab セパレータを多く含むグラフの構造的特徴
3. 学会等名 2020年度 冬のLAシンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山崎浩一
2. 発表標題 被覆関係にある極小セパレータについて
3. 学会等名 LAシンポジウム
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------