様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　４ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ１１８４１

研究課題名（和文）マルコフ連鎖における定常分布の不等式系に基づく数値計算法と待ち行列モデルへの応用

研究課題名（英文）Computational algorithms for the stationary distribution of Markov chains based on the system of inequalities and its application to queueing models

研究代表者
滝根　哲哉（Takine, Tetsuya）

大阪大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：００２１６８２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：連続時間マルコフ連鎖における条件付き定常分布の新たな数値計算法を開発した。従来の研究では、（条件付き）定常分布を線形連立方程式の解として特徴づけ、それを元に数値計算法が開発されている．一方、本研究では，一般のマルコフ連鎖における条件付き定常分布を、推移率行列の北西角がもつ情報から得られる線形不等式系で特徴付け、これを元に新たな条件付き定常分布の精度保証付き数値計算法を開発した。さらに、開発した数値計算法を基礎として、従来の行列解析法では取り扱うことができなかった、到着率と崩壊率がレベル依存する待ち行列モデルに対して精度保証付き数値的解法を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
マルコフ連鎖の定常分布は平衡方程式と呼ばれる等式により特徴付けられる。それ故、従来の研究では等式を元にした解法が議論されてきた。本研究では、遷移確率行列の北西角が持つ定常分布に関する情報を不等式で表現し、解が存在する領域（解空間）を明示的に与えた。さらに、北西角に含まれている状態の内、北西角に含まれない状態から１ステップで到達可能な態の集合が与えられれば、解空間が多面体の相対的内部で与えられることを示した。特別な構造をもたないマルコフ連鎖の定常分布の性質はほとんど議論されておらず、本研究の成果は、今後、さらなる理論の進化に貢献すると思われる。

研究成果の概要（英文）：We have developed a new computational method for the conditional stationary distribution in continuous-time Markov chains. In previous studies, the (conditional) stationary distribution is characterized as the solution of a system of linear equations, and a numerical calculation method has been developed based on this. In this study, on the other hand, the conditional stationary distribution in a general Markov chain is characterized by a system of linear inequalities obtained from the information contained in the northwest corner of the transition rate matrix, and a new computational method with guaranteed accuracy for the conditional stationary distribution was developed based on this. Furthermore, based on the developed numerical calculation method, we have established a numerical solution method with guaranteed accuracy for a queueing model in which the arrival rate and disaster rate are level-dependent, which could not be handled by conventional matrix analysis methods.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：マルコフ連鎖　条件付き定常分布　不等式系　数値計算法　待ち行列モデル

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

マルコフ連鎖の定常分布の数値計算は待ち行列理論を含む確率モデル全般において非常に重要な位置を占めている。ただし、可算無限集合上で定義されるマルコフ連鎖の場合、無限個の未知数をもつ線形連立方程式を解く必要があるため、厳密な解を数値計算することは特別な場合を除き困難である。そのため、一般には切断近似法が用いられる。これは推移率行列の北西角を切り出し、適当に要素を補うことで有限状態マルコフ連鎖の推移率行列を構成し、その定常解を元のマルコフ連鎖における条件付き定常分布の近似解とする手法である。しかし、どのように要素を補うか、また、その結果得られる近似解の精度に関しては、経験則しか知られていない。

２．研究の目的

可算無限集合上で定義されるマルコフ連鎖の条件付き定常分布に対する新たな数値計算法を開発し、従来の行列解析法が適用できない各種待ち行列モデルの性能評価へ応用することを目的とする。具体的には、元のマルコフ連鎖における推移率行列の北西角が条件付き定常分布に対してもつ全情報を抽出し、それに基づいて条件付き定常分布の近似解を導出する手法を考案する。具体的には以下の通りである。

従来の研究では、（条件付き）定常分布を線形連立方程式の一意解として特徴づけている。一方、本研究では、条件付き定常分布を線形不等式系の解として特徴づけるところに独自性がある。すなわち、有限次元ベクトルとして与えられる条件付き定常分布を相対的内部に含む凸多面体を同定し、それに基づく数値計算法を開発する。まず、推移率行列の北西角に位置する部分行列が条件付き定常分布に関してもっている不等式系としての全情報を解析的に明らかにし、その確率的解釈を与える。次に、これらの結果を基礎として、条件付き定常分布の数値計算法の開発を行う。推移率行列の北西角から不等式系へと向かうアプローチは従来の研究では見られない全く新しい発想であり、他に類を見ない独自性・創造性をもつ。

３．研究の方法

まず、推移率行列の北西角を元に、条件付き定常分布を不等式系の解（凸多面体上の点）として特徴づけるとともに、凸多面体を張るベクトルを明示的に与えることで、条件付き定常分布の凸結合表現を導く。次に、推移率行列の北西角の直下に位置する部分行列の情報を用いて、上記で得られた凸結合表現から冗長性を取り除き、条件付き定常分布が存在する領域である、凸多面体の相対的内部の明示的表現ならびにその表現がもつ標本路上での確率的な意味を明らかにする。さらに、確率的な解釈と解析的結果を併用して、凸多面体がもつ性質、単調な包含関係やその極限等を示す。

次に上記で得られた成果に基づいて、一般のマルコフ連鎖に対して、計算結果がもつ真の解との誤差の上限も同時に出力するような、条件付き定常分布に対する数値計算法を開発する。さらに、計算量削減を目指して、複数の凸多面体が存在する場合に適用可能な数値計算法を開発する。具体的には、従来の行列解析法で用いられる互いに素なレベルという概念を拡張して、一部の状態が複数の有限部分集合に含まれることを許したうえ、これらの間に下降方向へ飛び越しなしという意味での半順序が定義できる場合について検討を行う。

最後に、系が崩壊（システムが故障し、系内の客の全てあるいは一部が消滅）する率が系内客数に依存するモデルを取り上げ、ここまでの成果に基づいて、このモデルに適した数値計算法を開発する。

４．研究成果

以下では連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ は定常であると仮定する。また、一般性を失うことなく、状態集合は $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$ とし、推移率行列を $\boldsymbol{Q}$ とする。なお、斉時、規約で正再帰的な遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつ離散時間マルコフ連鎖の定常分布 $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{D}}$ に興味がある場合は、推移率行列 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}$ (ただし $\boldsymbol{I}$ は単位行列) をもつ連続時間マルコフ連鎖を考えれば良い。一般に、切断近似法では、ある自然数 $N$ に対して、可算無限の状態集合 $\mathbb{Z}^+$ を有限の部分集合 $\mathbb{Z}_0^N = \{1, 2, \ldots, N\}$ とその補集合 $\mathbb{Z}_{N+1}^{\infty} = \{N+1, N+2, \ldots\}$ に２分割し、可算無限個の要素からなる補集合 $\mathbb{Z}_{N+1}^{\infty}$ に含まれる状態の定常確率を全て 0 とみなし、有限状態集合 $\mathbb{Z}_0^N$ 上で定義されたマルコフ連鎖で近似する手法である。特に増補切断近似法では、定常分布 $\boldsymbol{\pi}$、

推移率行列 $\boldsymbol{Q}=[q_{i,j}]$ を

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{Z}_0^N & \mathbb{Z}_{N+1}^{\infty} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}^{(1)}(N) & \boldsymbol{\pi}^{(2)}(N) \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{Q}=\begin{array}{c} \\ \mathbb{Z}_0^N \\ \mathbb{Z}_{N+1}^{\infty} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{Z}_0^N & \mathbb{Z}_{N+1}^{\infty} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N) & \boldsymbol{Q}^{(1,2)}(N) \\ \boldsymbol{Q}^{(2,1)}(N) & \boldsymbol{Q}^{(2,2)}(N) \end{pmatrix} \end{array}$$

としたとき、$(N+1)$ 次元ベクトル $\boldsymbol{\pi}^{(1)}(N)$ を正規化した $\boldsymbol{\pi}(N)=\boldsymbol{\pi}^{(1)}(N)/\boldsymbol{\pi}^{(1)}(N)\boldsymbol{e}$ が満たす線形連立方程式 $\boldsymbol{\pi}(N)[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)+\boldsymbol{Q}_A(N)]=\boldsymbol{0}$ を構築する。なお $\boldsymbol{Q}_A(N)$ は非負かつ $[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)+\boldsymbol{Q}_A(N)]$ の各行の和が 0 となるように補正する増補行列である。よって、行列 $[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)+\boldsymbol{Q}_A(N)]$ は、$\mathcal{S}$ 上で定義された元のマルコフ連鎖を近似的に表現する有限状態集合 $\mathbb{Z}_0^N$ 上で定義されたマルコフ連鎖の推移率行列、$\boldsymbol{\pi}(N)$ はその定常分布である。なお、$\boldsymbol{\pi}(N)$ は $X(0)\in\mathbb{Z}_0^N$ という条件下での条件付き定常分布の近似とも解釈できる。

以下では、$\mathcal{M}(\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))$ を特定の $\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)$ をもつエルゴード的なマルコフ連鎖の集合とする。さらに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(N)&=(-\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))^{-1}, \qquad \overline{\boldsymbol{H}}(N)=\mathrm{diag}^{-1}(\boldsymbol{H}(N)\boldsymbol{e})\boldsymbol{H}(N) \\ \Gamma(n)&=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^{n+1};\ \boldsymbol{\alpha}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}=1\}, \quad n\in\mathbb{Z}^+ \\ \mathcal{J}(N)&=\{j\in\mathbb{Z}_0^N;\ q_{i,j}>0 \text{ for some } i\in\mathbb{Z}_{N+1}^{\infty}\} \end{aligned}$$

とする。加えて、$\mathcal{M}(\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N),\mathcal{J}(N))$ を特定の $\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)$ と $\mathcal{J}(N)$ をもつエルゴード的なマルコフ連鎖の集合とする。$\mathcal{J}(N)\neq\mathbb{Z}_0^N$ の場合、一般性を失うことなく

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N) \\ \boldsymbol{Q}^{(2,1)}(N) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \mathbb{Z}_0^N \\ \mathbb{Z}_{N+1}^{\infty} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathcal{J}(N) & \mathbb{Z}_0^N\setminus\mathcal{J}(N) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_+^{(1,1)}(N) & \boldsymbol{Q}_0^{(1,1)}(N) \\ \boldsymbol{Q}_+^{(2,1)}(N) & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \end{array}$$

と書くことができる。さらに

$$\Gamma^+(N)=\left\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{\alpha}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}=1,\ [\boldsymbol{\alpha}]_i=0\ (i\in\mathbb{Z}_0^N\setminus\mathcal{J}(N))\right\}$$

とする。

(1) $\mathcal{M}(\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))$ に含まれる任意のマルコフ連載に対して、

$$\boldsymbol{\pi}(N)\in\mathcal{P}(N), \quad N\in\mathbb{Z}^+$$

が成立する。ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(N)&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}=1\} \\ &=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{H}}(N),\ \boldsymbol{\alpha}\in\Gamma(N)\right\} \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{M}(\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N),\mathcal{J}(N))\neq\emptyset$ のとき、$\mathcal{M}(\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N),\mathcal{J}(N))$ に含まれる任意のマルコフ連載に対して

$$\boldsymbol{\pi}(N)\in\mathrm{ri}\,\mathcal{P}^+(N), \quad N\in\mathbb{Z}^+$$

が成立する。ただし、$\mathcal{J}(N)=\mathbb{Z}_0^N$ のとき $\mathcal{P}^+(N)=\mathcal{P}(N)$ であり、$\mathcal{J}(N)\neq\mathbb{Z}_0^N$ のときは

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+(N)&=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{Q}_+^{(1,1)}(N))\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{Q}_0^{(1,1)}(N))=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}=1\right\} \\ &=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{H}}(N),\ \boldsymbol{\alpha}\in\Gamma^+(N)\right\} \end{aligned}$$

である。なお、$\mathrm{ri}\,\mathcal{P}^+(N)$ は $\mathcal{P}^+(N)$ の相対的内部を表す。さらに、任意の $\boldsymbol{x}\in\mathrm{ri}\,\mathcal{P}^+(N)$ に対して $\boldsymbol{\pi}(N)=\boldsymbol{x}$ となるマルコフ連鎖が存在する。

(3) 任意の増補切断近似法によって得られる解の集合を

$$\mathcal{T}(N)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}\left[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N)+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}(N)\right]=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}=1,\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}(N)\in\mathcal{A}(N)\right\}$$

とする。ただし

$$\mathcal{A}(N) = \bigl\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)};\ \boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{e} = (-\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))\boldsymbol{e}\bigr\}$$

また、任意の線形増補切断近似によって得られる解の集合を

$$\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(N) = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}\bigl[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N) + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}(N)\bigr] = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{e} = 1,\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}(N) \in \mathcal{A}_{\mathrm{L}}(N)\bigr\}$$

とする。ただし

$$\mathcal{A}_{\mathrm{L}}(N) = \bigl\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)};\ \boldsymbol{X} = (-\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))\boldsymbol{e}\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma(N)\bigr\}$$

このとき

$$\mathcal{T}(N) = \mathcal{T}_{\mathrm{L}}(N) = \mathcal{P}(N), \quad N \in \mathbb{Z}^{+}$$

が成立する。さらに

$$\mathcal{T}_{\mathrm{L}}^{+}(N) = \mathcal{P}^{+}(N), \quad N \in \mathbb{Z}^{+}$$

が成立する。ただし

$$\mathcal{T}_{\mathrm{L}}^{+}(N) = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N+1};\ \boldsymbol{x}\bigl[\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N) + (-\boldsymbol{Q}^{(1,1)}(N))\boldsymbol{e}\boldsymbol{\zeta}\bigr] = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{e} = 1,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Gamma^{+}(N)\bigr\}$$

(4) 上記の成果に基づき、誤差上界が評価可能な近似解を求める数値計算法を開発した。

(5) 到着率と系が崩壊する率が系内客数に依存するモデルに対して、このモデルに適した数値計算法を開発した。

なお、(1)–(4) の成果は [1]、(5) の成果は [2] で発表済みである。さらに、[2] は第 12 回日本オペレーションズ・リサーチ学会論文賞を受賞した。


[1] M. Kimura and T. Takine, "Characterization of the Conditional Stationary Distribution in Markov Chains via Systems of Linear Inequalities," Advances in Appiled Probability. vol.52, no.4, pp.1241–1283, December 2020

[2] M. Kimura and T. Takine, "Numerical Implementation of the Augmented Truncation Approximation to Single-Server Queues with Level-Dependent Arrivals and Disasters," Journal of Operations Research Society of Japan, vol.64, no.2, pp.61–86, April 2021

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>T. Takine | ４．巻<br>100 |
| ２．論文標題<br>On level-dependent QBD processes with explosive state space | ５．発行年<br>2022年 |
| ３．雑誌名<br>Queueing Systems | ６．最初と最後の頁<br>353-355 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s11134-022-09796-1 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>- |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Masatoshi Kimura and Tetsuya Takine | ４．巻<br>64 |
| ２．論文標題<br>NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE AUGMENTED TRUNCATION APPROXIMATION TO SINGLE-SERVER QUEUES WITH LEVEL-DEPENDENT ARRIVALS AND DISASTERS | ５．発行年<br>2021年 |
| ３．雑誌名<br>Journal of Operations Research Society of Japan | ６．最初と最後の頁<br>61-86 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.15807/jorsj.64.61 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>- |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Masatoshi Kimura　and　Tetsuya Takine | ４．巻<br>52 |
| ２．論文標題<br>Characterization of the conditional stationary distribution in Markov chains via systems of linear inequalities | ５．発行年<br>2020年 |
| ３．雑誌名<br>Advances in Applied Probability | ６．最初と最後の頁<br>1249-1283 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1017/apr.2020.40 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>- |

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

６．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
| --- | --- |