

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K11864

研究課題名（和文）高次漸近許容性に基づく新しい統計的手法の開発

研究課題名（英文）Development of a new statistical method based on higher-order asymptotical admissibility

研究代表者

田中 秀和（Tanaka, Hidekazu）

大阪公立大学・大学院理学研究科 准教授

研究者番号：50302344

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：主に以下の4点について研究を行った。（1）尺度母数に制限がある場合のパレート分布の形状母数の推定問題について、（2）Ushakovの不等式の改良について、（3）確率分布の平均、分散と任意個の裾確率と対応する分位数の間に成立する統一的关系について、（4）2変量正規分布の距離相関係数の推定問題について

研究成果の学術的意義や社会的意義

尺度母数に制限があるパレート分布の形状母数の推定問題については、従来、シミュレーション結果に基づいてのみStein型推定量が推奨されていた。しかしながら、本研究成果によって、小標本論の枠組みではStein型推定量を含めて、従来知られていたすべての推定量を優越する推定量を理論的に導出することが出来た。また、大標本の枠組みでは新しく導出した推定量を含め、従来知られていた推定量が2乗誤差損失関数の下で2次漸近許容的であるかどうかを理論的に判別することが出来た。

研究成果の概要（英文）：The following four topics were mainly studied. (1) On estimation of the shape parameter of Pareto distribution when scale parameter is restricted. (2) On improvement of Ushakov inequality. (3) On unified relationship between mean, variance, and arbitrary number of probabilities and their quantiles of probability distribution. (4) On estimation of the distance correlation coefficient of bivariate normal distribution.

研究分野：数理統計学

キーワード：2次漸近許容性 パレート分布 距離相関係数 形状母数 Ushakovの不等式 分位数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

統計的推測における重要なテーマの1つに、推定量の許容性に関する研究がある。許容性の概念は推定量の良さを表す多くの性質の中でも、不偏性、一致性、有効性等、他の性質に比べて弱い性質と認識されているが、逆に実用的であり、最低限満足すべき基本的な性質の1つと考えられている。この性質は、従来、小標本論、特に正規分布等を含む指数型分布族のような正則な確率分布で論じられてきた。一方、本研究課題は推定量の許容性を大標本論の枠組み、つまり、推定量を修正最尤推定量のクラスに制限して議論する。このような大標本論の枠組みでの許容性の性質は2次漸近許容性と呼ばれており、研究の対象は、通常、次の3つに焦点が当てられる。(1) 推定量が2次漸近許容的かどうかを判別する方法の確立、(2) 2次漸近非許容的な推定量が与えられたとき、これを優越し、かつ2次漸近許容的な推定量(改良推定量)の構成法の確立、(3) 特定の推定問題において、従来の推定量が2次漸近許容的かどうかを判別し、2次漸近非許容的であれば、その改良推定量を提案し、さらに実データへ応用

2. 研究の目的

本研究課題に関連して、研究の目的は主に以下の3つである。(1) 正則な確率分布において、被推定関数がベクトルの場合に、修正最尤推定量が2次漸近許容的となるための必要十分条件、および改良法の導出、特定の確率分布への応用、(2) 非正則な確率分布において、修正最尤推定量の2次漸近許容性について、(3) 特定の正則な確率分布において、従来の推定量の2次漸近許容性について。

3. 研究の方法

正則な確率分布において、被推定関数がベクトルの場合には、修正最尤推定量が2次漸近許容的となるための必要条件と十分条件は導出されている。これを発展させ、必要十分条件、および改良法を可能な限り体系的に研究する。ここでは、ポテンシャル論、測度論、ベクトル解析等と密接な関係があるため、統計関係は言うにおよばず、最新の情報を調査するとともに、国内外の研究者を訪問し、討論することで研究を進める。一般の設定の下では困難を伴うことも予想されるが、このような場合は、確率分布、被推定関数、推定量等に適切な条件を課すことにより、必要十分条件、および改良法の導出を目指す。

4. 研究成果

(1) 尺度母数に制限がある場合にパレート分布の形状母数の推定問題を適切な条件を満たす損失関数の下で、小標本、および大標本の観点から考察した。まず、小標本の観点からは Patra and Kumar (2017) では、最尤推定量、改良最尤推定量、最小リスク不変推定量、Stein 型推定量、Kubokawa 型推定量、(あるクラスの事前分布に関する)一般化ベイズ推定量が提案されていた。そこでは理論的な根拠はなく、シミュレーション結果に基づいてのみ Stein 型推定量を推奨していた。そこで、今回、これらすべての推定量、および一様最小分散不偏推定量を優越する推定量の導出に取り組み、その結果、これらすべての推定量を優越する推定量を導出することが出来た。特に2乗誤差損失関数、エントロピー損失関数、対称損失関数の下では新しく導出した推定量の良さをシミュレーションによっても確認することが出来た。一方、大標本の観点からは新しく導出した推定量を含む前述の推定量が2次漸近許容的かどうかを2乗誤差損失関数の下で考察した。その結果、新しく導出した推定量、最小リスク不変推定量、Stein 型推定量、Kubokawa 型推定量、(特別な事前分布に関する)一般化ベイズ推定量は2次漸近許容的であり、一様最小分散不偏推定量、最尤推定量、改良最尤推定量、(上記以外の事前分布に関する)一般化ベイズ推定量は2次漸近非許容的であることを示した。また、これら非許容的な推定量に対してはそれ自身を優越し、かつ2次漸近許容的となる推定量を構成した。

(2) 確率分布の裾確率を評価する不等式として Bienayme-Chebyshev の不等式(Bienayme(1853), Chebyshev(1867))が知られている。一方、確率分布に単峰形を仮定した場合、連続型では Gauss の不等式(Gauss(1823))、離散型では Ushakov の不等式(Ushakov(1998))が知られている。Gauss の不等式は Bienayme-Chebyshev の不等式より良い上限を与えることが示されるのに対し、Ushakov の不等式は状況によっては Bienayme-Chebyshev の不等式より悪い上限を与える場合がある。つまり、Ushakov の不等式は単峰形の情報を十分に活用できていないことになり、改良の余地があることを示唆している。本研究では Ushakov の不等式を改良する上限を提案し、さらに Bienayme-Chebyshev の不等式より良い上限を与えることを示した。この応用として、確率分布に離散単峰形を仮定した場合の3シグマルールについて考察した。

(3) 与えられた確率分布に対して、その平均、分散と、任意次数の確率ベクトルと対応する分

位数ベクトルの間に成り立つ統一的关系を導出した。この関係の特徴としては、まず、確率分布に条件を課すことなく成立する点が挙げられる。また、本研究に関連する Renyi の不等式 (Renyi(2007))、Selberg の不等式 (Selberg(1940)) はそれぞれ四分位範囲、裾確率の和の上限を与えているのに対し、今回導出した関係は任意個の分位数を個別に用いている点も特徴の1つである、したがって、この関係を用いることにより、Renyi の不等式、Selberg の不等式その他、従来知られていた Hoeffding(1952), Hotelling and Solomons(1932), Cantelli(1928), Salwa and Frank(1981)等の不等式 (及びその拡張) も容易に導出できると同時に、これらの不等式間の関係についても明快にすることが出来た。また、たとえば外れ値に関連する閾値や2つの分位数の和の存在範囲等、従来知られていなかった結果も得ることが出来た。現在、これらの成果は論文としてまとめ、学術雑誌に投稿中である ([1])。本研究の発展として、確率分布に对称性や単峰性を仮定した場合については、現在、学術雑誌への投稿準備中である ([2])。

(4) 多変量確率分布における Pearson の相関係数は、複数の変量間の関係を調べるのによく用いられる (Pearson(1895))。しかしながら、これには3つの欠点がある。それらは、(i) 変量間の線形関係しか測定できないこと、(ii) 相関係数が0であることは、必ずしも変量間の独立性を意味しないこと、(iii) 2つの変量の次元が異なるときに相関係数を測定できないこと、である。これらの欠点を改善するために、Szekely et al.(2007)は、距離相関係数の概念を提案し、特に2変量正規分布の距離相関係数を導出した。そこで、本研究では2変量正規分布からの無作為標本に基づいて、距離相関係数の2乗の推定問題を2次漸近許容性の観点から解析した。まず、推定量を修正最尤推定量に制限したとき、ある条件を満足する推定量が2次漸近許容的であるための必要十分条件を導出した。その結果、最尤推定量、漸近不偏修正最尤推定量は2次漸近許容的であるのに対し、Jeffreys の事前分布に関する(一般化)ベイズ推定量は2次漸近非許容的であることがわかった。さらに、2次漸近非許容的な推定量に対しては、これを2次漸近的に改良し、かつ2次漸近許容的な推定量を構成することが出来た。改良の良さについてはシミュレーションによっても確認することが出来た。なお、これらの成果は論文としてまとめ、学術雑誌への投稿準備中である ([3])。

引用文献

- [1] Kensho Kobayashi and Hidekazu Tanaka. Unified Relationship between Mean, Variance, and an Arbitrary Number of Quantiles. Submitted for publication.
- [2] Kensho Kobayashi and Hidekazu Tanaka. Unified Relationship between Mean, Variance, and an Arbitrary Number of Quantiles of Symmetric distribution. In Preparation.
- [3] Kiichi Ueda and Hidekazu Tanaka. Estimation of the Square of Distance Correlation Coefficient. In Preparation.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yabuno Mashu, Tanaka Hidekazu	4. 巻 51
2. 論文標題 A note on estimation of a shape parameter in a Pareto distribution	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 7561-7574
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03610926.2021.1875241	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kobayashi Kensho, Tanaka Hidekazu	4. 巻 50
2. 論文標題 Improvement of the Ushakov bound	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 5929-5940
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03610926.2020.1737878	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 小林健将, 田中秀和
2. 発表標題 Relationship between Mean, Variance, and an Arbitrary Number of Quantiles
3. 学会等名 OCAMI, 統計的推測理論への幾何学的アプローチ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小林健将, 田中秀和
2. 発表標題 Relationship between mean, variance, and an arbitrary number of quantiles
3. 学会等名 RIMS, ベイズ法と統計的推測
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------