

令和 5 年 6 月 3 日現在

機関番号：16201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K12004

研究課題名（和文）大規模非線形動力学システムの適応型モデル低次元化とその応用

研究課題名（英文）Adaptive Model Order Reduction for Large-scale Nonlinear Dynamical Systems and Its Application

研究代表者

丹治 裕一（Tanji, Yuichi）

香川大学・創造工学部・教授

研究者番号：10306988

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：非線形モデル低次元化を用いてCTの画像再構成を行う方法を提案した。ここで、非線形モデル低次元化手法として知られている、固有直交分解、ボルテラ級数に基づく方法、軌道区分線形化、テンソル演算について検討を行い、有効な画像再構成が行えるのは固有直交分解のみであることを示した。固有直交分解ではモデルを作成した投影データ（入力）の付近では良好な精度を与えるが、その入力から離れるに従って低次元化モデルの精度が低下することが分かった。この改良のため、想定される複数の入力を用いて分散共分散行列を作成してモデル低次元化を行ったところ、良好な精度で画像再構成が行えることを確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形モデル低次元化は、電子系設計自動化、制御、数値解析の分野で研究が行われてきたが、本研究によって、保健・医療分野にも応用できることを示した。また、近年、モデル低次元化手法としては、固有直交分解よりも他の方法に注目が集まっていたが、これに反して固有直交分解でなければ低次元化できない問題があることを示したことは、モデル低次元化の研究にとって、非常に有益である。また、提案手法は医用画像再構成に対して、人工知能技術の導入が可能であることを示している。

研究成果の概要（英文）：We proposed a CT image reconstruction using nonlinear model order reduction. Considering proper orthogonal decomposition, a method based on the Volterra series, piecewise trajectory linearized method, and Tensor operation, we confirmed that proper orthogonal decomposition is effective for image reconstruction. Proper orthogonal decomposition provides good image quality, but the accuracy decreases when projection data (input) are far from the input data where the reduced-order model is generated. To improve the accuracy, we made the variance-covariance matrix using multiple inputs of interest and generated the reduced-order model. Consequently, a high-quality reconstructed image was obtained.

研究分野：電子情報工学

キーワード：ハイパフォーマンスコンピューティング シミュレーション工学 医用工学 生理学

### 1. 研究開始当初の背景

電子・情報通信機器の高性能化に伴う処理信号の高速化は、配線の伝送線路効果を顕著にした。この影響を考慮した設計を行うために、配線のモデルである大規模な線形回路網を小規模な回路で置き換えるモデル低次元化に関する研究が 1990 年代から電子系設計自動化の分野で行われてきた。一方、自動制御の分野では、H 制御が発展する中で制御部が肥大化し、線形システムを低次元化する必要に迫られた。そこで、モデル低次元化に関する研究が盛んに行われ、数値解析の分野にも波及して数学的な側面からも研究が行われた。そして、線形システムを低次元化するソフトウェアも開発されるようになったが、低次元化モデルが原システムにどの程度の精度で近似できているかの具体的な指標は示されておらず、モデル低次元化を利用した解析は必ずしも広く用いられていないのが現状である。ここで、線形だけでなく、非線形モデルにおいて低周波での精度が保証できれば、原システムの時間応答の外形が確実に保存できるようになるため、モデル低次元化を用いた解析が今以上に普及する可能性がある。

### 2. 研究の目的

本研究開始当初の目的は、非線形動力学システムの低次元化において、原システムとの誤差を評価しながら、低周波で精度の良い低次元化モデルを作成すること、すなわち、適応型モデル低次元化を提案することにあった。次に、この方法を心臓の解析及び CT 画像再構成に応用することを想定していた。そこで、CT 画像再構成に関する非線形モデル低次元化の検討を行ったところ、前提となる理論がほとんど利用できないことが分かった。そこで、研究内容を CT 画像再構成のためのモデル低次元化に集中し、高品質な再構成画像を効率的に得るにはどのようにしたら良いかについて、様々な角度から検討を行い、CT 画像再構成のための非線形モデル低次元化手法を開発することを目的に検討を行った。

### 3. 研究の方法

#### (1)非線形動力学を用いた CT 画像再構成

非線形動力学を用いた CT 画像再構成[1, 2]では以下のような微分方程式の定常解を求める。

$$dx(t)/dt = -\text{diag}(x(t))A^T(Ax(t)-y) \quad (1)$$

$$dx(t)/dt = -\text{diag}(x(t))\text{diag}(\mathbf{1}-x(t))A^T(Ax(t)-y) \quad (2)$$

ここで、 $A$  は投影作用素、 $y$  は X センサで検出される投影データである。式(1)では、解  $x$  が非負で拘束されるのに対して、式(2)では、解の各要素は[0,1]で拘束されることになる。一方、画像の画像値は、0 から 255 の整数値を取るため、式(2)のボックス制約が CT 画像再構成としてはふさわしいが、式(1)の非負拘束では構造が単純であり、非線形モデル低次元化の理論を考察する上では適している。

#### (2)ボルテラ級数

近年の研究において、非線形モデル低次元化手法として、ボルテラ級数を用いる方法に注目が集まっている。そこで、式(1)にボルテラ級数展開を適用するために以下のような 2 次双線形システムに変形する。

$$dx(t)/dt = Ax(t) + H(x(t) \otimes x(t)) + Nx(t)u(t) + Bu(t) \quad (3)$$

この場合に、以下のような連立の線形微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= Ax_1(t) + Bu(t), & dx_2(t)/dt &= Ax_1(t) + H(x_1(t) \otimes x_1(t)) + Nx_1(t)u(t), \\ dx_s(t)/dt &= Ax(t) + H(x_j(t) \otimes x_j(t)) + Nx_{s-1}(t)u(t), & s &= 3 \end{aligned} \quad (4)$$

しかしながら、CT 画像再構成に必要なパラメータでは、上記のシステムは不安定であるか、応答が変化しない。すなわち、ボルテラ級数によるモデル低次元化では CT 画像再構成は行えないことが分かった。

#### (3)軌道区分線形化法、テンソル演算

軌道区分線形化法では、非線形微分方程式を線形化して線形のモデル低次元化手法である Krylov 部分空間法を適用する。この場合に式(1)の右辺を  $F(x)$  と置くとその微分は  $dF/dx = -\text{diag}(A^T Ax) - \text{diag}(x)A^T A + \text{diag}(A^T Ay)$  のように表される。ここで、行列  $A^T A$  は蜜行列となるため、得られた線形微分方程式から Krylov 部分空間を抽出することは演算効率が極めて悪くなる。さらに、この抽出はすべての展開点及び複数の入力に対して行う必要があり、その演算は非常に困難であると考えられる。

式(3)の  $H$  はヘッセ行列でありテンソルの性質を有していることが知られている。 $H(x(t) \otimes x(t))$  は式(1)の  $-\text{diag}(x(t))A^T Ax(t)$  に相当している。ここで、行列  $A^T A$  の固有値分解を実行して、その低次元化を考えることができる。これは、テンソル分解の一種と考えられるが、精度を低下させずに低次元化を行うことは困難であり、これはテンソル分解によるモデル低次元化の有効性の可能性が低いことを意味している。

#### (4)固有直交分解

固有直交分解では、非線形ダイナミクスを数値積分法によって解析し、その状態変数ベクトルを  $[x^0, x^1, x^2, \dots, x^L]$  のように置く。ここで、分散共分散行列 (スナップショット行列) を  $C = (1/L)$

$x^k(x^k)^T$ のように計算する。次に、固有値分解によって得られる直交ベクトル  $V$  により低次元化モデルを作成する。式(2)のボックス拘束を持つ場合に、モデル低次元化を適用すると以下の非線形微分方程式が得られる[3]。

$$dz(t)/dt = -V \text{diag}(Vz(t)) \text{diag}(\mathbf{1} - Vz(t)) VV^T A^T (AVz(t) - y) \quad (5)$$

$z(t)$ は低次元化された微分方程式の状態変数であり、元の次元より非常に小さく表現されている。ここで、複数の入力に対して、この低次元化モデルを対応させるには、複数の入力に対する状態変数をすべて考慮して、スナップショット行列を作成すれば、それらの入力を代表するような直交ベクトル  $V$  が得られる。再構成画像は、式(5)の平衡点を求めるための最小二乗方程式を解くことで効率良く得ることができ、 $Vz$  のように求めることができる。

$$VV^T A^T (AVz - y) = 0 \quad (6)$$

#### 4. 研究成果

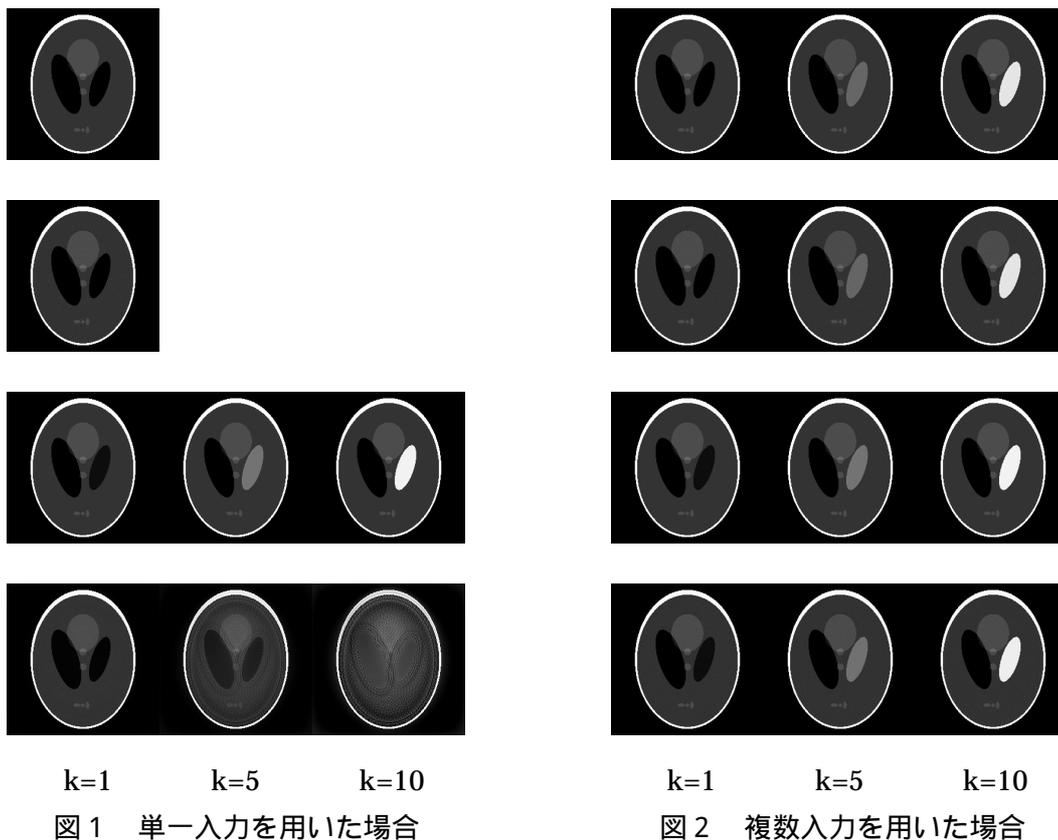


表1 単一入力の場合と複数入力の場合の再構成画像の品質[dB]

k	単一入力		複数入力	
	スナップショット	再構成	スナップショット	再構成
1	35.57	37.49	35.57	37.02
2		32.05	35.63	37.13
3		27.90	35.62	37.16
4		24.98	35.53	37.11
5		22.77	35.40	36.98
6		21.00	35.23	36.77
7		19.53	35.05	36.50
8		18.26	34.85	36.18
9		17.16	34.66	35.81
10		16.18	34.52	35.42

図1に頭蓋骨のモデルに固有直交分解を適用した場合の結果を示す[4,5]。1列目は原画像、2列目はスナップショット行列を作成するために非線形動力学を解析し、その最終ステップの解を画像にした場合、3列目は評価に用いた原画像、4列目はスナップショット行列から直交列を抽出して再構成画像を作成した場合の結果である。ここで、評価は  $k=1, \dots, 10$  の10個のテスト画像で行った。この場合に、 $k$ の値が大きくなるほど、スナップショット行列の作成に使用した入力から離れていることを意味している。 $k$ の値が小さい場合には良好な再構成画像が得られているが、 $k$ の値が大きくなると再構成画像の品質が著しく低下していることが分かる。一方、

図2は複数の入力を用いてスナップショット行列を作成した場合である。1列目からスナップショット行列を計算するために使用した原画像, 数値積分の最終ステップでの解を画像化した場合, 再構成画像の評価に使用したテスト画像, 再構成画像の順に示されている。各列での画像の違いはほとんどなく, 複数の入力を考慮してスナップショット行列を作成すれば良好な再構成画像が得られることが分かる。表1に画像の定量評価を peak-signal-noise-ratio (PSNR)を用いて行った結果を示す。表1から再構成画像は 35 [dB]程度の結果となっており, 非常に高品質であることが分かる。また, 単一入力を用いる場合には  $k$  の値が大きくなると明らかに画像品質が劣化していることが数値的に分かる。

図2の結果を得るために, 非線形動力学の解析及びスナップショット行列の作成に 2,571 秒, 固有値分解による直交列の抽出及び最小二乗法における逆行列の計算に 122 秒, 画像再構成には 0.6 秒必要であった。すなわち, 画像再構成にはほとんど計算時間を必要としないことが分かる。

本手法ではスナップショット行列の作成によって直交列を得ており, この部分が機械学習を行っている部分である。本手法を応用することで, 人工知能技術を用いた画像再構成システムの構築が可能になると考えられる。

#### < 引用文献 >

- [1]. K. Fujimoto, O. M. Abou Alola, and T. Yoshinaga, "Continuous-time image reconstruction using differential equations for computed tomography," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 15, no. 6, pp. 1648-1654, 2010.
- [2]. Yamaguchi, K. Fujimoto, O. M. Abou Alola, and T. Yoshinaga, "Continuous-time image reconstruction for binary tomography," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 18, no. 8, pp. 2081-2087, 2013.
- [3]. Y. Tanji and K. Fujimoto, "Nonlinear model order reduction of continuous-time image reconstruction systems," Nonlinear Theory and Its Applications, vol. 12, no. 3, pp. 512-525, 2021.
- [4]. T. Suehiro and Y. Tanji, "Application of parameterized nonlinear model order reduction to CT image reconstruction" Proc. 2022 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp. 613-616, 2022.
- [5]. Y. Tanji and K. Fujimoto, "Nonlinear Model Order Reduction for CT Image Reconstruction," The 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICAM2023), (to be appeared).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yuichi Tanji and Ken'ichi Fujimoto	4. 巻 12
2. 論文標題 Nonlinear model order reduction of continuous-time image reconstruction systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications	6. 最初と最後の頁 512-525
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1587/nolta.12.512	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Suehiro and Yuichi Tanji	4. 巻 -
2. 論文標題 Improvements of reservoir computing with proper regularization term	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks	6. 最初と最後の頁 46-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Suehiro and Yuichi Tanji	4. 巻 -
2. 論文標題 Application of parameterized nonlinear model order reduction to CT image reconstruction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of 2022 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications	6. 最初と最後の頁 613-616
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 植村大地，丹治裕一，藤本憲市，北島博之，堀川洋
2. 発表標題 非線形動力システムに基づくCT画像再構成における マルチGPUを用いた高速化
3. 学会等名 電子情報通信学会 非線形問題研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 友成元熙, 丹治裕一
2. 発表標題 効率的な誤差評価に基づく大規模線形回路網の適応型モデル低次元化
3. 学会等名 友成元熙, 丹治裕一
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Motohiro Tomonari, Yuichi Tanji
2. 発表標題 Adaptive Selections of Krylov Subspaces for Reduced-Order Modeling of Large-Scale RLC Networks
3. 学会等名 2020 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taichi Uemura Yuichi Tanji (Kagawa University)
2. 発表標題 Implementation of CT Image Reconstruction with Nonlinear Dynamical System on Multi- GPUs
3. 学会等名 2020 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuchi Tanji and Ken'ichi Fujimoto
2. 発表標題 Nonlinear Model Order Reduction for CT Image Reconstruction
3. 学会等名 The 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICAM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------