

令和 3 年 6 月 15 日現在

機関番号：12613

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2020

課題番号：19K13736

研究課題名（和文）新しい自動微分と計算ファイナンスへの応用

研究課題名（英文）A new automatic differentiation and its application to computational finance

研究代表者

山田 俊皓（YAMADA, Toshihiro）

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：50754701

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：研究課題の目標であったファイナンスにおける新しい自動微分として、確率微分方程式の弱近似理論を用いた偏微分方程式の解の高次自動微分法を構築した。この成果は論文が数値計算の主要ジャーナルに掲載された。また自動微分法に関する様々な諸問題に対して新手法を構築し、これらの成果が複数本ジャーナルに掲載された。さらに自動微分に関わる新たな研究課題にも取り組み、ディープラーニングなどと組み合わせた方法など様々な研究成果を得たことも踏まえ、本研究課題は目標を達成できたといえる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の学術的・社会的意義は、不確実性を伴う数理モデルにおける様々なリスク量のパラメータ感応度の高精度近似を可能にした点である。これは数理ファイナンス・金融工学の理論面だけでなく、金融実務のリスクヘッジやリスクマネジメントにおいても重要な意味を持つ。また、本研究課題で得られた成果はファイナンスにとどまらず、自然科学・社会科学の様々な確率モデルへの応用も可能であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We provided a new automatic differentiation scheme for solutions to partial differential equations using a weak approximation approach of stochastic differential equations. Some numerical approximation schemes for related automatic differentiation problems are also obtained. Furthermore, we proposed a deep learning method combined with the automatic differentiation scheme for high-dimensional nonlinear partial differential equations and nonlinear pricing problems in finance.

研究分野：ファイナンス、数値解析

キーワード：自動微分法

1. 研究開始当初の背景

金融派生商品の価格感応度(金融派生商品価格の微分)であるグリークス (Greeks) と呼ばれる指標は取引量決定や損益に関わる量であるため、グリークス指標をモニタリングして管理することは金融機関にとって重要な課題である。グリークス指標は数学的に見れば偏微分方程式の解の微分に対応するが、最も naïve な計算法である数値微分は一般に安定しない。このような背景から自動微分によるグリークス指標の計算が注目されている。一方、金融の実務で導入されている標準的な自動微分の方法は、数値計算の観点からみれば収束そのものが速い方法ではない。この点を改善することが本研究のテーマである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、現在普及している標準的な自動微分の方法に代わる新しい理論と方法を提供し、自動微分のシミュレーションの効率化だけでなく時間離散化の効率化を図ることである。現在に至るまで先行研究においてグリークス指標すなわち多次元の数理モデルに対する偏微分方程式の解の微分の高次離散化法は存在しないが、研究代表者の提案する確率微分方程式の弱近似法を応用し数値計算コストを増大させることなく高次離散化を達成することが目的である。

3. 研究の方法

本研究ではグリークスすなわち偏微分方程式の解の微分を作用素分解と捉えることから始まる。そして分解した作用素を局所的に高次近似し、偏微分方程式の解の微分の高次離散化を行う。さらに、シミュレーションの計算が実行できるように偏微分方程式の解の微分の高次離散化の確率論的表現を得る。この表現に対して数値計算を実行し、グリークスの高速高精度評価を行う。さらにこの方法を推し進め、高次元のファイナンスモデルへの応用を行う。

4. 研究成果

初年度は偏微分方程式の解の微分に対する二次の離散化法を提案した。特に、ファイナンスの問題に応用できるようなテスト関数(ペイオフ関数)のクラスに対して近似法を構成し、近似誤差の理論的評価も行った。数値計算により本方法が二次の離散化を達成することを確認している(図1参照)。この研究成果は、数値計算の専門誌 Numerical Algorithms に掲載された。

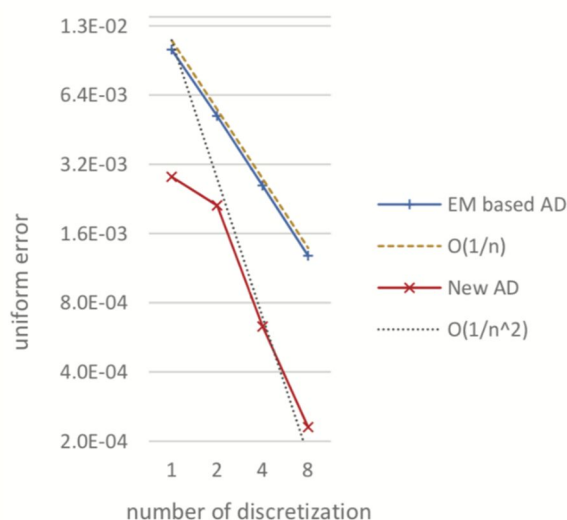


図1: 新しい自動微分法(赤線)による偏微分方程式の解の微分の数値計算結果と通常の自動微分法による結果(青線)との比較(出典: Tokutome and Yamada, Numerical Algorithms (2021))

最終年度は、自動微分法の応用の研究を行った。偏微分方程式の基本解あるいは熱核の近似においては、近似する対象がデルタ関数(超関数)とブラウン運動の汎関数の合成の期待値となるため、通常の微分法を用いる方法の適用は見込めない。このような問題に対して、熱核の短時間近似及び確率微分方程式の弱近似と自動微分法を用いて新しい方法を導出した。この方法は、ファイナンスにおいては例えばリスクを伴う金融資産を確率過程と捉えたときの密度関数の近似に対応するため、広範な応用が期待できる。この研究成果は、数値計算に関する主要ジャーナルの一つである *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* に掲載された。また同様の方法を時間依存型の偏微分方程式及び確率微分方程式に応用した研究成果が *Monte Carlo Methods and Applications* にアクセプトされた。

研究期間を通して、新たに登場した研究課題にも取り組み、ディーブラーニングと組み合わせた方法など様々な研究成果が出たことも踏まえ、本研究課題は目標を達成できたといえる。

・ Kimiki Tokutome and Toshihiro Yamada, Acceleration of automatic differentiation of solutions to parabolic partial differential equations: a higher order discretization, *Numerical Algorithms*, 86, 593-635 (2021)

・ Riu Naito and Toshihiro Yamada, An acceleration scheme for deep learning-based BSDE solver using weak expansions, *International Journal of Financial Engineering*, 7(2), (2020)

・ Yuga Iguchi and Toshihiro Yamada, Operator splitting around Euler-Maruyama scheme and high order discretization of heat kernels, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 55, 323-367, (2021)

・ Toshihiro Yamada, High order weak approximation for irregular functionals of time-inhomogeneous SDEs, *Monte Carlo Methods and Applications* (to appear) (2021)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Kimiki Tokutome, Toshihiro Yamada | 4. 巻 86 |
| 2. 論文標題 Acceleration of automatic differentiation of solutions to parabolic partial differential equations: a higher order discretization | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Numerical Algorithms | 6. 最初と最後の頁 593-635 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11075-020-00902-z | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------|
| 1. 著者名 Riu Naito, Toshihiro Yamada | 4. 巻 7(2) |
| 2. 論文標題 An acceleration scheme for deep learning-based BSDE solver using weak expansions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 International Journal of Financial Engineering | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S2424786320500127 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Yuga Iguchi, Toshihiro Yamada | 4. 巻 55 |
| 2. 論文標題 Operator splitting around Euler-Maruyama scheme and high order discretization of heat kernels | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis | 6. 最初と最後の頁 323-367 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1051/m2an/2020043 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------|
| 1. 著者名 Toshihiro Yamada | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 High order weak approximation for irregular functionals of time-inhomogeneous SDEs | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Monte Carlo Methods and Applications | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/mcma-2021-2085 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 山田俊皓 |
| 2. 発表標題 確率微分方程式の高次弱近似と自動微分, BSDEへの応用 |
| 3. 学会等名 大阪大学中之島ワークショップ (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Toshihiro Yamada |
| 2. 発表標題 Higher order weak approximation for SDEs and BSDEs of McKean-Vlasov type |
| 3. 学会等名 Ritsumeikan Math-Fin Seminar (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 ~ 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 山田俊皓 |
| 2. 発表標題 Operator splitting around Euler-Maruyama scheme and high order discretization of heat kernels: application to finance |
| 3. 学会等名 一橋大学経済統計ワークショップ |
| 4. 発表年 2020年 ~ 2021年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

| 6. 研究組織 | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|
|---------|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|