

令和 4 年 5 月 18 日現在

機関番号：12604

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14341

研究課題名（和文）高校数学における数学的な見方・考え方を育成する教材開発と教科書紙面化に関する研究

研究課題名（英文）Research on the Development of Teaching Materials and Creating Textbook Pages for Developing Mathematical Perspectives and Ways of Thinking in High School Mathematics

研究代表者

成田 慎之介（NARITA, Shinnosuke）

東京学芸大学・教育学研究科・准教授

研究者番号：00804064

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の成果は大きく2つある。第一に、高校数学における数学的な見方・考え方を育成するために、二次関数のグラフの平行移動、二次不等式、三角比、四面体の重心、極限、微分積分に関する6つの教材を開発した。そのうち、三角比と極限、微分積分の教材については、実践を通してその有効性を検証することができた。第二に、開発した6つの教材のうち、三角比と四面体の重心に関する教材の教科書紙面案を作成することができた。三角比については、実践を通してその有効性を検証することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高校数学における数学的な見方・考え方を育成するための教材の蓄積は、小中学校のそれと比較すると圧倒的に少ない。また、数学的な見方・考え方を育成するための教科書の紙面に関する研究も少ない。そのため、本研究においてそれらの教材を開発することができたこと、および、教科書紙面案を作成することができたことは、今後の高校数学の教材開発や、算数・数学科における教科書研究に対して示唆的である。ただし、教科書紙面を作成するための枠組みについては十分に検討することができておらず、今後の課題として残っている。

研究成果の概要（英文）：There are two major outcomes of this study. First, in order to develop mathematical perspective and ways of thinking in high school mathematics, we developed six teaching materials on the following topics: parallel transitions of graphs of quadratic functions, quadratic inequalities, trigonometric ratios, centers of gravity of tetrahedra, limits, and calculus. Among them, I was able to verify the effectiveness of the trigonometric ratio, limits and calculus teaching materials through practice. Secondly, among the six developed materials, I was able to prepare the drafts of the textbook pages for trigonometric ratios and the center of gravity of a tetrahedrons. The effectiveness of the trigonometric ratio was verified through practice.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的な見方・考え方 創造的な学習指導 問いの役割と構造 高校数学 教材開発 教科書

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

昭和31年改訂の高等学校数学科の学習指導要領において、数学的な見方・考え方が「中心概念」という学習領域として初めて指導内容に位置づけられた。しかし、その具体的な教材に関する研究はなされることなく、教科書にも反映されずに姿を消してしまった(長崎, 2013)。また、中島(1981)や片桐(1988)、松原(1990)などは、具体的な教材と実践例を基に数学的な見方・考え方について構造的に捉えているが、高校数学の教材はほとんど例に挙げられていない。その後、現在に至るまで、高校数学における教材は開発されているものの、数学的な見方・考え方の理論に基づいた教材開発は十分になされていない。一方で、小中学校では数学的な見方・考え方の教材として、代表的な事例がいくつも挙げられる。例えば「関数の考え」といえば、小学校では変わり方調べ、中学校では多角形の内角の和を求める際に分割した三角形の数と辺や頂点の数を対応させる場面などがある。しかし、高校数学における関数の考えの代表的な事例は存在しない。 $y = \sin^2 \theta + \sin \theta$ について $t = \sin \theta$ と置き換える場面などは、高校ならではの関数の考えを用いる場面のはずであるが、そこに焦点をあてた研究はなされていない。高校数学において数学的な見方・考え方の理論に基づいた教材は、小中学校のそれと比較すると著しく少なく、そのような教材の開発が必要である。

また、どんなに良い教材を開発したとしても、それが生徒に還元されなければ意味がない。生徒への影響力が大きいのは学校教育において主たる教材である教科書である。しかし、これまでの数学教育学における教材開発の研究のほとんどが教材の開発およびその実践にとどまっており、具体的な授業を想定した教科書紙面案を作成するまでには至っていない。そこで、数学的な見方・考え方を育成するために、適切な展開や問いかけなどが教科書の教材を用いる授業において実現されるように、紙面構成のための理論的な枠組みを開発し、それに基づいた教科書紙面の記述案を作成する必要がある。

2. 研究の目的

以上の研究の背景から、本研究の目的は、高校数学において、数学的な見方・考え方を育成するための教材を開発し、その有効性を検証するとともに、教科書紙面化のための枠組みを開発し、記述案を作成することである。

3. 研究の方法

本研究の目的を達成させるために、以下の2つの研究課題を設定した。第一の課題は、数学的な見方・考え方に関する理論に基づいて、高校数学において数学的な見方・考え方を育成するための教材を開発することである。そのために、数学的な見方・考え方に関する先行研究を基に数と式、図形、関数領域の教材をそれぞれ開発し、実践を通してその有効性を検証する。第二の課題は、数学的な見方・考え方を育成するための教科書紙面構成の理論的枠組みを開発し、それに沿った紙面案を作成するとともに、作成した紙面案を基に授業を実践し、開発した枠組みの検証・修正を行い改善を図ることである。そのために、戦時中に使用されていた中学校数学科の教科書である『数学 第一類』『数学 第二類』における問いの系列を分析し、そこに埋め込まれている数学的な見方・考え方を顕在化させる。これらの教科書は、生徒が自ら数学をつくることを志向して編纂されている。中島(1981)は創造的な活動の中にこそ数学的な見方・考え方があることを指摘しており、その視点で『数学 第一類』『数学 第二類』という教科書の構成を構造化することによって、教科書紙面を構成するための枠組みを開発できると考えた。

4. 研究成果

本研究の成果は、高校数学における数学的な見方・考え方を育成するための教材を開発したこと、およびその教科書紙面案を作成したことである。以下、それぞれの概要について記す。

(1) 教材の開発

本研究において6つの教材を開発した。具体的には、二次関数のグラフの平行移動、二次不等式、三角比、四面体の重心、極限、微分積分に関するものである。ここでは、四面体の重心と三角比について述べる。

四面体の重心の教材は、三角形の重心の定義や性質をもとに、四面体の重心を定義するというものであり、類推の考えを育成することを目的としている。問題は「四面体の重心を定義しよう」である。視点と四面体の重心の定義を整理すると次の表ようになる。

表1 四面体の重心を定義する際の視点と定義

視点1: 「中線」を拡張する()
「中線」は「三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分」であり、これを四面体に対応させて「四面体の各頂点とそれぞれの対面の重心を結ぶ線分」とする。
定義: 四面体の各頂点とそれぞれの対面の重心を結ぶ線分の交点
視点2: 「三角形の3本の中線は1点で交わり、その交点は各中線を2:1に内分する」の「2:1」に着目する

定義	四面体の1つの頂点とその対面の重心を結ぶ線分を3:1に内分する点
視点3	「中線」を拡張する() 「中線」を「三角形の頂点を通り、面積を二等分する直線」と捉え、これを四面体に 対応させて「四面体の頂点とその対面の中線を通る平面」とする。
定義	四面体の各頂点とその対面の中線を通る平面
視点4	各面の重心を結ぶ
定義	四面体ABCDの頂点A, B, C, Dの対面の重心をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とし、この4 点を結んで四面体をつくる。四面体 $A_1B_1C_1D_1$ の頂点 A_1, B_1, C_1, D_1 の対面の重心をそ れぞれ A_2, B_2, C_2, D_2 とし、この4点を結んで四面体をつくる。これを限りなく繰り 返すとき、点列 $A, A_1, A_2, A_3, \dots, B, B_1, B_2, B_3, \dots, C, C_1, C_2, C_3, \dots, D, D_1, D_2, D_3, \dots$ が収束 する点

四面体の重心を定義する活動を通して、三角形の重心に関する様々な要素に着目し、それらをどのように捉え、拡張するかによって、多様な四面体の重心の定義を考えることができる。類推の過程において、着目した要素を様々な視点から捉える機会になるという価値がある。また、1次元から3次元の重心に関して多様な見方をするることによって、重心という知識に関する理解を深めることができるという価値もある。

三角比に関する教材は、鋭角の三角比を辺の比として定義するための教材である。直角三角形の3辺の比が1つの鋭角によって決まるという関数の考えに関する教材である。鋭角の三角比を辺の比として定義する際、次の2つの性質が背景にある。性質：1つの鋭角に対して、その角をもつ直角三角形はすべて相似である、性質：相似な三角形については3辺の比が一定である。これらの性質をあわせて、「直角三角形においては、1つの鋭角を決めれば、3辺の比が決まる」ことを生徒に捉えさせることが重要である。そこで、次の問題を作成した。

表2 三角比の問題

【問題0】	最近色々な所に太陽光パネルが設置されている。太陽の光を最も効率よく吸収するには、太陽光パネルをどのように設置すればよいだろうか。
【問題1(1)】	太陽光パネルのサイズが横4m、縦3mであり、南中高度が 60° の場合、太陽光パネルの支柱は何mにすればよいだろう。
【問題1(2)】	南中高度 51° の場合、支柱の高さを何mにすればよいだろう。
【問題2】	様々な角度に対する三角比の表を作成しよう。

問題1(1)では、中学校で既習である特別な直角三角形の辺の比を利用して解決することを想定している。そして、問題1(2)においては縮図を用いて解決することを想定している。縮図を複数かくと、測定誤差によって支柱の高さに誤差が生じる。そこで、「本当は等しい値になるのか?」という問いによって、上記の性質とを明らかにし、三角比を定義する。さらに、三角比表を作成する活動を通して、鋭角と辺の比の関係により着目させることを意図している。

三角比、極限、微分積分の教材に関しては、実践を通してその有効性を検証することができた。

(2) 教科書紙面案

四面体の重心と三角比について、教科書紙面案を以下のように作成した。四面体の重心の教科書紙面案は以下の通りである。

【問題】	四面体の重心を定義してみよう。
問1	三角形の重心の定義やその性質のどのような点に着目することが考えられるだろうか。
問2	問1で着目したことをもとに、四面体の重心の定義を考えてみよう。
問3	問2で考えた定義が妥当であることを確認するためには、どのような命題を証明する必要があるだろうか。その命題を考え、証明してみよう。

図1 四面体の重心の教科書紙面案

三角比については、表2の問題1(2)について、次の問いを設定した。

問1	解決の方法と結果を発表しよう。結果はどれも一致しただろうか。
問2	太郎さんと花子さんは、次のような縮図をかくて支柱の高さを求めた。 太郎さん：斜辺が3cmの縮図の場合高さは1.9cm 支柱の高さは1.9m 花子さん：斜辺が12cmの縮図の場合高さは7.5cm 支柱の高さは $7.5 \div 4 = 1.875$ より1.9m 1.9と1.875では若干異なるが、本当は等しい値になるのだろうか。

図2 三角比の教科書紙面案

問2によって、実寸大の三角形と縮図の三角形とが相似であることから、3辺の比が等しいという事実を顕在化させる。

三角比の紙面案については実践を通して検証することができた。

(3) 今後の課題

本研究における課題は、高校数学において数学的な見方・考え方を育成するための教材を開発すること、および、数学的な見方・考え方を育成するための教科書紙面構成の理論的枠組みを開発し、それに沿った紙面案を作成することであった。教材の開発は複数行うことができたが、教科書紙面構成の理論的枠組みを開発するには至らなかった。これが今後の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 成田 慎之介	4. 巻 20
2. 論文標題 昭和初期における微積分教材の開発過程に関する一考察 - 東京高等師範学校附属中学校の取り組みに焦点をあてて -	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数学教育史研究	6. 最初と最後の頁 18-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 成田 慎之介、小林 廉	4. 巻 101
2. 論文標題 微積分学の基本定理の創出を志向した高校数学における微積分の教材開発	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 2~12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32296/jjsme.101.9_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 成田 慎之介	4. 巻 102
2. 論文標題 極限概念の理解の困難性を克服する学習指導	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 4~16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32296/jjsme.102.5_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 成田 慎之介
2. 発表標題 『数学 第一類』の教材構成に対する米国数学科教科書の影響 - 「公式」の扱いに焦点をあてて -
3. 学会等名 日本数学教育学会 第8回春期研究大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 成田 慎之介
2. 発表標題 極限概念の理解の困難性を克服する学習指導 - 「極限は到達するか否か」に焦点をあてて -
3. 学会等名 日本数学教育学会 第7回春期研究大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成田 慎之介
2. 発表標題 我が国の数学教育現代化期における新しい指導内容に関する一考察 中学校数学科の意図されたカリキュラムと教科書に焦点をあてて
3. 学会等名 日本数学教育学会 第9回春期研究大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shinnosuke NARITA
2. 発表標題 Approach of An Early-1940s Japanese Secondary Mathematics Textbook to Teaching the Fundamental Theorem of Calculus
3. 学会等名 The 14th International Congress on Mathematical Education
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 太田伸也先生ご退職記念論文集編集委員会	4. 発行年 2021年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 270
3. 書名 数学教育学における教材研究の真価(担当：第二部 四面体の重心を定義する活動に関する一考察)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------