

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14499

研究課題名(和文) q-analogues of multiple zeta values and their applications in geometry

研究課題名(英文) q-analogues of multiple zeta values and their applications in geometry

研究代表者

BACHMANN Henrik (Bachmann, Henrik)

名古屋大学・多元数理科学研究科(国際)・G30特任准教授

研究者番号：20813372

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：「多種ゼータ値の  $q$  類似体とその幾何学への応用」プロジェクトでは、 $q$  類似体の関連性と、より広範なクラスの  $q$  系列の研究が研究されました。このために、「Polynomial functions on partitions」を導入しました。主な結果は、特定の多項式の  $q$  括弧によって与えられるこれらすべての関数が、常に複数のゼータ値の類似物を生成するということです。特に、 $q$  が 1 になるときの極限を計算しました。応用として、これらの接続が複数のゼータ値間の関係をどのように生じさせるかを示しました。別のプロジェクトでは、形式的な二重エイゼンシュタイン空間の概念を導入しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

The introduction of the theory of polynomial functions on partitions builds a new bridge between the theory of partitions and multiple zeta values. This gives for example new families of relations among multiple zeta values coming from the theory of modular forms.

研究成果の概要(英文)：In the project "q-analogues of multiple zeta values and their applications in geometry" the connection of q-analogues and the study of a more broader class of q-series were studied. For this we (j.w. with Jan-Willem van Ittersum) introduced the notion of polynomial functions on partitions. The main result is that all these functions, which are given by the q-bracket of certain polynomials, are always give rise to qanalogues of multiple zeta values. In particular, we calculated the limit as q goes to 1. As an application we showed how these connections give rise to relations among multiple zeta values. In another project (j.w. Ulf Kuehn and Nils Matthes) we introduced the notion of the formal double Eisenstein space. This space can be seen as a generalization of the formal double zeta space introduced by Gangl-Kaneko-Zagier. We showed that any power series satisfying the Fay-identity give rise to a realization of this space.

研究分野：Number theory

キーワード：Multiple zeta values Modular forms Functions on partitions

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1 . 研究開始当初の背景

In the project "q-analogues of multiple zeta values and their applications in geometry" the connection of q-analogues and the study of a more broader class of q-series were studied. This research lies within the intersection of multiple zeta values (real numbers), their q-analogues (q-series), their finite analogues (infinite tuples of elements in finite fields), and the connection to modular forms (functions) to all of these objects. Multiple zeta values are intriguing mathematical entities that emerge as natural extensions of special values of the Riemann zeta function. They are embedded in a wide variety of mathematical and physical contexts, including but not limited to modular forms, knot theory, enumerative geometry, mixed Tate motives, quantum groups, moduli spaces of vector bundles, and scattering amplitudes. Their omnipresence in these domains underscores their mathematical significance and broad applicability. The novel lens through which this project views these values is the q-analogue, a concept that generalizes many number theory results in the context of q-series. The last few years have witnessed a surge of interest in the relations between multiple zeta values and modular forms facilitated through q-analogues, resulting in a myriad of observations and conjectures. In particular the connection to enumerative Geometry was suggested due to works on square tiled surfaces and their connection to quasimodular forms. This was one of the motivations to study the connection of the q-bracket to q-analogues of multiple zeta values.

## 2 . 研究の目的

The research project lies within the intersection of multiple zeta values, their q-analogues and their connection to modular forms. The purpose of the research project is the investigation of the interaction of these objects in enumerative geometry (counting square-tiled surfaces) and algebraic geometry (Hilbert schemes of points on a surface). In both areas, certain families of q-series appear and the asymptotics of these q-series as q goes to 1 and the derivation with respect to q have important geometric interpretations. The goal of this research project was to clarify the connection of these q-series to q-analogues of multiple zeta values and to obtain new results in both areas.

### 3 . 研究の方法

The research was advanced through collaboration with experts in the field, facilitated by presentations at conferences and personal meetings. This platform allowed for a thorough discussion of preliminary findings and generation of new hypotheses. Computational tools like Pari, Sage, and Mathematica played a significant role in the research process. These tools were used to create conjectures regarding the properties of the objects under study, and to test these conjectures through numerical experiments and simulations. In addition, research stays in Europe and attendance at conferences (e.g. the Kansai multiple zeta research meeting) in Japan provided opportunities for intellectual exchange. Interactions with international peers led to the introduction of fresh perspectives and novel ideas.

### 4 . 研究成果

In a joint project (j.w. with Jan-Willem van Ittersum) we introduced the notion of polynomial functions on partitions. The main result is that all these functions, which are given by the  $q$ -bracket of certain polynomials, are always give rise to  $q$ -analogues of multiple zeta values. In particular, we calculated the limit as  $q$  goes to 1. This connection allowed use to connect multiple zeta values to other functions on partitions, such as shifted symmetric functions. As an application we showed how these connections give rise to relations among multiple zeta values. In another project (j.w. Ulf Kuehn and Nils Matthes) we introduced the notion of the formal double Eisenstein space. This space can be seen as a generalization of the formal double zeta space introduced by Gangl-Kaneko-Zagier. We showed that any power series satisfying the Fay-identity give rise to a realization of this space. In particular, the Kronecker-function gives rise to a realization which is given in depth one by Eisensteins series and their derivatives. It was shown that there exists an operator on this space which can be seen as a natural generalization of the derivative  $q \frac{d}{dq}$ . As an application we gave a new way of proving identities among quasimodular forms.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 BACHMANN Henrik, TAKEYAMA Yoshihiro, TASAKA Koji	4. 巻 73
2. 論文標題 Finite and symmetric Mordell-Tornheim multiple zeta values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1129-1158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84348434	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bachmann Henrik	4. 巻 90
2. 論文標題 Modular forms and q-analogues of modified double zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg	6. 最初と最後の頁 201 ~ 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12188-020-00227-7	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 BACHMANN Henrik, TAKEYAMA Yoshihiro, TASAKA Koji	4. 巻 4
2. 論文標題 Finite and symmetric Mordell-Tornheim multiple zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84348434	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bachmann Henrik, Charlton Steven	4. 巻 87
2. 論文標題 Generalized Jacobi-Trudi determinants and evaluations of Schur multiple zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103133 ~ 103133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2020.103133	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bachmann Henrik, Takeyama Yoshihiro, Tasaka Koji	4. 巻 2
2. 論文標題 Special values of finite multiple harmonic q-series at roots of unity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 31, "Algebraic Combinatorics, Resurgence, Moulds and Applications (CARMA)	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/205-1/1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 Polynomial functions on partitions
3. 学会等名 Kyushu University Lecture series (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 Connecting modular forms and multiple zeta values via combinatorial multiple Eisenstein series.
3. 学会等名 Seminar arithmetische Geometrie und Zahlentheorie, Hamburg
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 Multiple Eisenstein series and their Fourier coefficients
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー予定 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 A variant of the double shuffle relations and quasi modular forms
3. 学会等名 ACPMS Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 Formal quasi-modular forms
3. 学会等名 2021 Waseda number theory Conference
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 q-double zeta values and modular forms
3. 学会等名 Japan-Taiwan joint workshop on multiple zeta values (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 Combinatorial multiple Eisenstein series
3. 学会等名 第13回多重ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Henrik Bachmann
2. 発表標題 有限多重調和q級数の1のべき根での値と有限および対称多重ゼータ値
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------