

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14501

研究課題名（和文）正標数の代数多様体の p -進的性質と代数幾何学的性質についての研究研究課題名（英文）On p -adic properties and algebro-geometric properties of algebraic variety in positive characteristic

研究代表者

呼子 笛太郎（Yobuko, Fuetaro）

名古屋大学・多元数理科学研究科・特任助教

研究者番号：10825095

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：正標数代数幾何学の研究を、準 F -分裂性をテーマに行った。正標数の2次元有理二重特異点が全て準 F -分裂であるという計算に端を発し、準 F -分裂性と双有理幾何学及びそこに現れる特異点との関係についての研究をJacob Witaszek氏、田中公氏、河上龍郎氏、高松哲平氏、吉川翔氏と共同で開始した。その結果、2次元のklt特異点や3次元のklt特異点（ただし標数が41より大きい時）が準 F -分裂であることを証明した。また F -正則性を拡張した準 F -正則性を定義し、その基本的性質の解明や新たな現象の発見に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正標数の代数幾何学は複素幾何学や整数論との関連の中で発展を遂げた分野である。特に複素代数幾何学との対比の中で、標数0ではおき得ない種々の現象が発見されてきた。一方、正標数代数幾何学は暗号理論など純粋数学以外への応用を持つものであり、これまでより深い一般論の構築が必要とされている。本研究では、準 F -分裂性という概念をテーマにこの問題に取り組み一定の成果を上げた。

研究成果の概要（英文）：I studied algebraic varieties in positive characteristic from the view point of quasi- F -splitting. Inspired by my precede computation on two dimensional rational double points, Jacob Witaszek, Hiromu Tanaka, Tatsuro Kawakami, Teppei Takamatsu, Sho Yoshikawa, and I began a project on quasi- f -splitting and birational geometry and its singularity. In our joint work, we proved that two dimensional klt singularities and three dimensional singularities in characteristic greater than 41 are quasi- F -split. We also developed a theory of quasi- F -regularity, which is an extension of F -regularity and proved its fundamental properties and found an interesting new phenomena.

研究分野：代数幾何学

キーワード： F -分裂 準 F -分裂 カラビヤウ ファノ klt特異点

1. 研究開始当初の背景

複素数体上の代数多様体は、ユークリッド位相を考えることで、特異コホモロジーなど位相的なコホモロジー理論を用いて研究することができる。この手法は非常に強力であり、例えば Bogomolov-Tian-Todorov の定理によると、複素カラビヤウ多様体の変形は障害を持たないことが知られている。代数多様体の変形問題は、小平-Spencer 理論により、その接束のコホモロジーでコントロールされるが、カラビヤウ条件のもとではこのコホモロジーが位相的なコホモロジーと結びつき、安定的に振る舞うことがわかりモジュライの非特異性が従う。この議論のポイントは代数多様体の構造層上の接続層という代数的な対象が、位相的な対象と結びつくという点である。

一方、21 世紀に入る辺りから廣門らにより、正標数のカラビヤウ多様体で標数 0 に持ち上げ不可能なものがいくつか構成された。これは正標数のカラビヤウの変形問題が、一般には障害を持つことを意味する。これは標数 0 と違う正標数特有の興味深い現象として興味を集めたが、この現象の理論的説明はあまり進んでいなかった。

一方 Grothendieck らにより、正標数の代数多様体に対してもエタールコホモロジーやクリスタリンコホモロジーといった“位相的な”コホモロジー理論が構築された。さらにカラビヤウ多様体のクリスタリンコホモロジーへのフロベニウス作用の最小傾斜部分は Artin-Mazur 高さと呼ばれる、正の整数または無限大に値をとる不変量により決定されることが知られていた。

私はその当時知られている持ち上げ不可能なカラビヤウ多様体の Artin-Mazur 高さが無限大であることに着目し、Artin-Mazur 高さが有限ならば持ち上げ可能ではないかという仮説を立てた。この問題は完全に解決するには至らなかったが、Artin-Mazur 高さ有限のカラビヤウ多様体は modulo p^2 に持ち上げ可能であるという部分的な結果を得た。その際決定的だったのは、F-分裂を拡張した準 F-分裂性という概念を導入したことである。

F-分裂性は 1980 年代に Mehta-Ramanathan により、正標数代数群の表現論の文脈で導入されたものであるが、同様の概念は 1960 年代から Hochster らにより正標数可換環論において研究されてきた。準 F-分裂性とはこの概念を Witt 環を用いて“数論的方向”に拡張したものであり、構造層やその上の接続層との関係がたどり易い概念である。一方、新しい概念であるので、その基本的性質の解明や、他分野との関連性はまだ研究されていなかった。

2. 研究の目的

新しい概念である準 F-分裂性をテーマに代数幾何学、数論幾何学両方面で研究を行う。その際、F-分裂スキームについて知られている諸々の定理を準 F-分裂の場合に拡張することと、準 F-分裂性を導入して初めて明らかになる現象を発見するという二つを意識していた。元々の F-分裂性は可換環論や双有理幾何学において深く研究されてきたので、準 F-分裂性についてもこの観点から研究を行う。また数論幾何学方向への研究としては、モジュライ問題の観点から研究を行う。特に Achinger-Zdanowicz による Serre-Tate 理論と F-分裂の関係についての最近の研究を準 F-分裂に拡張することを目的としていた。

3. 研究の方法

具体例の解析と一般論の構築を同時に進めた。松本雄也による RDP K3 曲面についての研究に触発され、標数 2, 3, 5 の RDP(有理二重点)の準 F-分裂性の計算を行った。このクラスの特異点は Artin により分類されているので、そのリストを用い計算を行った。この計算を受け、Jakub Witaszek、田中公、河上龍郎、高松哲平、吉川翔との共同研究を開始した。これは準 F-分裂の双有理幾何学、可換環論への応用をめざしたものであり、現在も進行中である。まず klt 特異点といった双有理幾何学に現れる特異点のクラスが、準 F-分裂であるかを決定することが最初の目標となった。そのために双有理射における準 F-分裂性の遺伝性や、準 F-分裂性の逆同伴問題を研究し、一般論を逐次構築しながら具体例を解明していくこととなった。共同研究はちょうどコロナの時期にはじまったので、主に Zoom 等を利用して議論を重ねた。

4. 研究成果

元々標数 7 以上の 2 次元 klt 特異点は F-分裂であるが、小さな標数では F-分裂ではないものが存在することが知られていた。共同研究において全ての標数で 2 次元 klt 特異点が準 F-分裂であることを示した。また 3 次元 klt 特異点については、全ての標数で F-分裂ではないものが存在することが知られていた。共同研究において、標数 43 以上では 3 次元 klt 特異点が準 F-分裂であることを示した。さらにこの標数についての評価は最良であることも示した。またこれらを証明するために、準 F-分裂性についての逆同伴問題を射影的な場合に解決した。

さらに F-分裂より強い概念として F-正則性が知られており、可換環論における密着閉包の理論や双有理幾何における極小モデル理論などにおいて活発に研究されてきた。共同研究におい

て、この概念を拡張した準 F-正則性を導入しその基本的性質を証明した。さらに上に述べた 2 次元 klt 特異点を実際には準 F-正則であることを証明した。

また準 F-分裂性と Hodge-Witt 性の類似を追求した。Hodge-Witt 性とは p-進コホモロジー論から出てきた概念である。具体的成果として完全体上の二つのスキームのファイバー積が準 F-分裂することと、一方のスキームが F-分裂で他方が準 F-分裂であることが同値であることを示した。これは Ekedahl による Hodge-Witt 性と ordinary 性についての定理の F-分裂類似であるといえる。さらにアーベル多様体に対して準 F-分裂性と Hodge-Witt 性が同値であることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Karemaker Valentijn, Yobuko Fuetaro, Yu Chia-Fu	4. 巻 386
2. 論文標題 Mass formula and Oort's conjecture for supersingular abelian threefolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107812 ~ 107812
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2021.107812	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nakkajima Yuki Yoshi, Yobuko Fuetaro	4. 巻 7
2. 論文標題 Degenerations of log Hodge de Rham spectral sequences, log Kodaira vanishing theorem in characteristic $p > 0$ and log weak Lefschetz conjecture for log crystalline cohomologies	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1537 ~ 1615
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-021-00475-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawakami Tatsuro, Takamatsu Teppei, Tanaka Hiromu, Witaszek Jakub, Yobuko Fuetaro, Yoshikawa Shou	4. 巻 128
2. 論文標題 Quasi F splittings in birational geometry II	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/plms.12593	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件／うち国際学会 2件）

1. 発表者名 呼子 笛太郎	
2. 発表標題 F-splitting, canonical lifting and Hodge-Wittness	
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2022（招待講演）（国際学会）	
4. 発表年 2022年	

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Hodge-Witt and quasi-Frobenius-splitting
3. 学会等名 K3, Enriques Surfaces, and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-Frobenius-split and Serre-Tate theory
3. 学会等名 名古屋大学代数幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-Frobenius-splitting and rational double points in positive characteristic
3. 学会等名 東大京大代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-Frobenius splittingの局所的研究
3. 学会等名 第65回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-F-splitting and two dimensional singularities
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-F-split and surface singularities
3. 学会等名 Degenerations and models of algebraic varieties and related topics (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-Frobenius-split and Achinger-Zdanowicz construction
3. 学会等名 Younger generations in Algebraic and Complex geometry VI (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Quasi-Frobenius-split and Serre-Tate theory
3. 学会等名 慶應義塾大学 代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 呼子 笛太郎
2. 発表標題 Rational double points in low characteristic and quasi- F-splitting
3. 学会等名 Singularities and Arithmetics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------