

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 5 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14512

研究課題名（和文）高次元代数幾何の数論幾何への展開

研究課題名（英文）Arithmetic Geometry via Higher Dimensional Algebraic Geometry

研究代表者

谷本 祥 (Tanimoto, Sho)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：10785786

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：多項式で定まる連立方程式の有理数解は古代ギリシャの時代から研究されている対象です。多項式の方程式は代数幾何の対象とする代数多様体を定め、有理数解は多様体上の有理点と呼ばれます。多様体が無限の有理点を認めるとき、有理点の数え上げ関数を考え、その数え上げ関数の漸近公式を予想するのがManin予想と呼ばれるものです。本研究ではManin予想に現れる例外集合のミステリーを解き明かしました。また有理点と整数点の狭間に位置するCampana点に対してManin予想を定式化しました。さらに有理点と曲線のアナロジーを使って、多様体上の曲線のモジュライ空間の性質を解明することに成功しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Manin予想の例外集合の双有理幾何学にまつわる研究は、Manin予想の理論の根幹をなす研究といえ、専門家から高い評価を受けています。私たちが発表した論文は希薄集合版のManin予想について基本的な文献になりつつあります。さらにCampana点のManin予想に関する研究は、私たちの論文が発表された以降数多くのCampana点のManin予想に関する研究が生まれました。さらに曲線のモジュライ空間にまつわる研究は、一つのムーブメントとして専門家から捉えられ、若い数学者が研究に参画してきています。

研究成果の概要（英文）：Rational solutions to a system of polynomial equations have been studied since the age of Greece. Polynomial equations define an algebraic variety investigated by algebraic geometers, and rational solutions are called as rational points on the variety. When there are infinitely many rational points on an algebraic variety, one can consider the counting function of rational points on that variety. One of outstanding questions is an asymptotic formula of this counting function, and this asymptotic formula is predicted by Manin's conjecture. In our research, we resolved a long standing mystery of exceptional sets in Manin's conjecture. Moreover we formulated Manin's conjecture for Campana points which are intermediate objects between rational points and integral points. Finally using analogy between rational points and curves, we studied properties of moduli spaces of curves on an algebraic variety using the perspective of Manin's conjecture.

研究分野：代数幾何，数論幾何

キーワード：Manin予想 Fano多様体 有理点 曲線 モジュライ空間 曲げ折り法 Campana点 極小モデル理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Diophantus 幾何とは、有理数係数多項式の方程式の有理数解を研究する学問である。Diophantus 幾何はギリシャの時代より研究され、現在でも未解決な問題が数多く存在する。多項式の方程式は代数幾何学研究対象とする代数多様体を定め、有理数解は多様体上の点とみなせる。このことが、有理数解が有理点と呼ばれる由縁である。

研究代表者は「代数多様体が無限の有理点を認めるとき、その有理点の数え上げ関数の漸近公式はどのように与えられ、それを如何に証明するか」という問いに集中して研究してきた。この漸近公式を予想するものとして 1989—1990 年頃に Yuri Manin と彼の共同研究者によって提唱された Manin 予想というものがある。Manin 予想を考える際、有理点が部分多様体に集積してしまうことがあるので、例外集合なるものを考えて数え上げ関数から例外集合の寄与を取り除く必要がある。研究代表者はこの例外集合の双有理幾何学を、高次元代数幾何、特に極小モデル理論や特異 Fano 多様体の有界性 (BAB 予想 Caucher Birkar によって解決) を用いて Brian Lehmann などと共に研究してきた。

2. 研究の目的

本研究構想は主に以下の二つのプロジェクトを目的とする:

(A): Campana 点の Manin 予想

Campana 氏と Abramovich 氏は有理点と整数点の狭間に位置する Campana 点の概念を提唱した。整数点が被約な境界因子に対して定義されるのに対し、Campana 点是有理数を係数に持つ有効 Q -因子に対して定義される。そこで Campana 点に対する Manin 予想を定式化し、ベクトル空間の同変コンパクト化などに対して証明する。さらに Campana 点の Manin 予想の例外集合の幾何学を発展させる。

(B): 有理曲線のモジュライと幾何的 Manin 予想

Lehmann 氏と研究代表者は Victor Batyrev による有限体上の Manin 予想のヒューリスティックの仮定を精密化した幾何的 Manin 予想は提唱した。この予想は多様体上の曲線のモジュライ空間の次元や既約成分にまつわる予想である。この幾何的 Manin 予想を 3 次元多様体や正標数の体上で定義された del Pezzo 曲面に対して証明する。

3. 研究の方法

(A): ベクトル空間の同変コンパクト化に対する Campana 点の Manin 予想は高さゼータ関数の手法を用いて証明する。その際アデル群上の Poisson 和公式がキーとなる。例外集合の幾何学はログ極小モデル理論が威力を発揮すると考えられる。

(B) 標数 0 では 3 次元 Fano 多様体や曲線上の del Pezzo 束に対して、森重文先生が発見した曲げ折り法の改良版である動的曲げ折り法を証明する。それを用いて幾何的 Manin 予想を次数に関する帰納法を使って証明する。

4. 研究成果

(1) Manin 予想の例外集合の幾何学

初年度では [6] の大幅な改訂作業を行なった。証明をより厳密にし、いくつかの例を加えた。Lemann 氏及び Sengupta 氏と共に、この論文で Manin 予想の例外集合を幾何的に定義し、その幾何的に定義した例外集合が Serre の意味で希薄(thin)になっていることを示した。

証明のキーとなるアイデアは極小モデル理論を用いて例外集合に寄与する部分多様体や被覆を特異 Fano 多様体に双有理変換し、Birkar が証明した特異 Fano 多様体の有界性に帰着させることである。これにより、代数閉体上では例外集合に寄与する多様体がある種の族からなることがわかる。ただ、ここから代数体上の議論に持ち込むために、構成した有界族がある種の普遍性を基礎体上満たすことを示す必要があった。そこで基点が有理点のときのホモトピーリフトや数論的基本群の半直積を利用した複雑な構成を使って、我々が構成した有界族がツイストの取り替えを認めて普遍性を満たすことを示した。最後に一つの被覆を固定したときに、例外集合に寄与する被覆のツイストたちの有理点の寄与の和集合は高々希薄集合になることを Hilbert の既約性定理を用いて証明し、我々の主定理は示された。[6] は Compositio Mathematica に掲載受理されている。

(2) デルタ不変量と数え上げ関数の上界

デルタ不変量とは Seshadri 定数や s -不変量のような直線束の正值性を測る量であり、研究代表者によって [1] で提唱された。さらに [1] では del Pezzo 曲面や 3 次元 Fano 多様体の反標準束に対してデルタ不変量を計算した。さらにデルタ不変量を用いて直線束に付随する高さ関数がある種の反作用原理を満たすことを示し、これを利用して多様体の有理点の数え上げ関数に対する上界を与えた。この上界は多くの 3 次元 Fano 多様体に対して、次元予想より精密な上界を

与えるものになっている。[1]は Algebra & Number Theory より出版された。

(3) Campana 点の Manin 予想

[3]で Pieropan 氏, Smeets 氏, Varilly-Alvarado 氏と共に klt Campana 点の Manin 予想を定式化し、ベクトル空間の同変コンパクト化に対してこの Manin 予想を証明した。

整数点の Manin 予想は Chambert-Loir 氏及び Tschinkel 氏などにより、線形代数群の作用が認められているときに考えられているが、未だに一般の場合の整数点の Manin 予想の定式化は成功していない。実際、Chambert-Loir—Tschinkel により、トーリック多様体に対する整数点の Manin 予想がアナウンスされているが、そのプレプリントの主張には反例があることがわかっており、整数点の Manin 予想はかなり定式化を行うことが難しい状況にある。しかし、我々は境界因子である Q -因子が極小モデル理論における klt 条件を満たすとき、klt Campana 点の Manin 予想が有理点の Manin 予想に酷似していることを発見し、そのアイデアを元に klt Campana 点の Manin 予想を定式化した。

さらに高さゼータ関数の手法を用いてベクトル空間の同変コンパクト化に対し、klt Campana 点の Manin 予想を証明した。漸近公式の証明は Tauber の定理により高さゼータ関数の解析接続の問題に帰着され、この解析接続をアデル群上の調和解析を用いて得るとというのが証明のアイデアである。[3]は Proceedings of the London Mathematical Society より出版された。さらにこの論文に基づいたサーベイ[8]を報告集に寄稿した。

また、Campana 点の Manin 予想の例外集合の幾何学も考察したが、Campana 点に似た概念である弱 Campana 点に対して Manin 予想をどう定式化するべきかがわかっておらず、今のところ例外集合の定式化は非常に難しいことがわかってきた。これは今後の課題として残っていくことになる。

(4) 3次元 Fano 多様体の幾何的 Manin 予想

[2]では Lemann 氏と共にほとんどの指数が 1 かつ Picard 数が 1 となる 3次元 Fano 多様体に対して幾何的 Manin 予想を証明した。

証明は Fano 多様体上の反標準次数 d の有理曲線のモジュライ空間に対して、次数 $d-1$ でモジュライ空間が高々二つの支配的成分しか持たないこと(つまり幾何的 Manin 予想)を仮定して、次数 d の自由な有理曲線に対して動的曲げ折り法を示す。次に次数 d における動的曲げ折り法を仮定して、次数 d の幾何的 Manin 予想を証明し、帰納法を回した。この帰納法におけるベースケースは次数が 2, 3, 4 の場合になる。[2]は Journal of Algebraic Geometry に出版された。

さらに[II]では Roya Beheshti, Brian Lehmann, Eric Riedl と共に任意の 3次元 Fano 多様体に対して動的曲げ折り法を証明することに成功した。

証明は森先生による非特異 3次元多様体上の因子的収縮射の分類を利用した。3次元 Fano 多様体が $E5$ タイプの収縮射を認めないときは、次元の数え上げにより動的曲げ折り法を帰納法によらず証明できた。 $E5$ タイプの収縮射を認める 3次元 Fano 多様体は多くなく、森—向井による分類に基づいて動的曲げ折り法をそれぞれのケースで解決した。[II]は学術雑誌に投稿中である。

さらに[II]の結果を用いて[4]では次数 1 の 3次元 del Pezzo 多様体に対して幾何的 Manin 予想を証明した。[4]は European Journal of Mathematics より出版された。

(5) 曲線上の del Pezzo 束の幾何的 Manin 予想

曲線 B 上の del Pezzo 束 X とは 3次元射影多様体 X から B への射で一般ファイバーが del Pezzo 曲面になっているものである。[I]において Lemann 氏と共に射影直線上の del Pezzo 束のセクションに対する動的曲げ折り法を証明した。

証明は次元の数え上げを用いた、帰納法に依存しない証明となっている。さらにこの動的曲げ折り法を用いて高さが低い del Pezzo 束のセクションに対して幾何的 Manin 予想をセクションの高さに基づく帰納法を用いて証明した。さらに動的曲げ折り法の Batyrev 予想, Abel-Jacobi 写像, Gromov-Witten 不変量の数え上げに対する応用を発見した。[I]は学術雑誌に投稿中である。さらに[I]に基づいたサーベイ論文[7]を代数学シンポジウムの報告集に寄稿した。

さらに[5]において、Lehmann 氏と共に任意の曲線 B 上の del Pezzo 束に対して、動的曲げ折り法を証明した。さらに動的曲げ折り法を用いてある種の幾何的条件を満たす del Pezzo 束に対して幾何的 Manin 予想を証明した。

動的曲げ折り法の証明は[I]に類似したものになっているが、幾何的 Manin 予想の証明は帰納法に依らない新しい証明となっている。特に幾何的 Manin 予想の証明はセクションのモジュライ空間の自由なセクションをパラメータライズする既約成分たちの集合に曲線を張り合わせて非特異曲線に変形するという操作で半群の作用が定まる。このとき動的曲げ折り法はこの半群作用が有限生成であることを主張し、これを使ってセクションの幾何的 Manin 予想を del Pezzo 曲面上の有理曲線の幾何的 Manin 予想に帰着させるのである。(del Pezzo 曲面上の有理曲線の幾何的 Manin 予想は Testa 氏により解決されている。) これにより del Pezzo 曲面上の任意の曲線の幾何的 Manin 予想の証明に成功した。[5]は Geometry & Topology に掲載受理されている。

(6) 正標数の代数閉体上定義された del Pezzo 曲面に対する幾何的 Manin 予想

[I I I]では Roya Beheshti, Brian Lehmann, Eric Riedl と共に十分大きい標数の代数閉体上定

義された del Pezzo 曲面上の有理曲線に対する幾何的 Manin 予想を証明した。

幾何的 Manin 予想の証明は標数 0 に持ち上げて標数 0 からの特殊化の議論を用いることで標数 0 の場合に帰着させることで幾何的 Manin 予想を証明した。さらに標数が 2 や 3 のとき、閉集合版の弱 Manin 予想を満たさない弱 del Pezzo 曲面の例の構成にも成功した。このような例は初めてであり、個人的に非常に驚いた。[III]は学術雑誌に投稿中である。さらに幾何的 Manin 予想に関するサーベイ論文[9]を報告集に寄稿した。

日本国内外でのインパクト・位置付け: (1)で得られた結果を元に書かれた[6]は Manin 予想の基礎付けとして専門家から重要視されるようになっており、希薄集合版の Manin 予想にとって基本的な文献になりつつある。(3)で実施された研究や文献[3]もかなり多くの数学者によって読まれていて、[3]の後 Campana 点の Manin 予想に関する一連の研究が誕生した。さらに(4), (5), (6)で実施された一連の幾何的 Manin 予想の研究も一つのムーブメントとして認識されており、若い研究者が参画してきている。

今後期待される展開: まず幾何的 Manin 予想の高次元での結果はまだ少なく、非自由曲線と藤田不変量の関係の高次元化、動的曲げ折り法の高次元化などさまざまな結果の高次元化が期待される。さらに有限体上の Manin 予想にとって、幾何的 Manin 予想と合わせて大事なのが曲線のモジュライ空間のホモロジカル安定性の問題である。これに関する結果はまだ少なく今後このような研究に参画していきたいと考えている。

[発表論文]

1. Sho Tanimoto, On upper bounds of Manin type, Algebra & Number Theory, 14-3, 731-761, (2020),
2. Brian Lehmann and Sho Tanimoto, Rational curves on prime Fano threefolds of index 1, Journal of Algebraic Geometry, 30-1, 151-188, (2021),
3. Marta Pieropan, Arne Smeets, Sho Tanimoto, and Anthony Varilly-Alvarado, Campana points of bounded height on vector group compactifications, Proceedings of the London Mathematical Society, 123-1, 57-101, (2021),
4. Nobuki Shimizu and Sho Tanimoto, The spaces of rational curves on del Pezzo threefolds of degree one, European Journal of Mathematics, 8-1, 291-308, (2022),
5. Brian Lehmann and Sho Tanimoto, Classifying sections of del Pezzo fibrations, II, Geometry & Topology, to appear,
6. Brian Lehmann, Akash Kumar Sengupta, and Sho Tanimoto, Geometric consistency of Manin's Conjecture, Compositio Mathematica, to appear,
7. Sho Tanimoto, Movable Bend and Break for sections of del Pezzo fibrations, 第 64 回代数数学シンポジウム報告集, 209-220, (2020),
8. Sho Tanimoto, Campana points, Height zeta functions, and log Manin's conjecture, 数理解析研究所講究録 2196 “解析的整数論の展望と諸問題”, 26-36, (2021),
9. Sho Tanimoto, An introduction to Geometric Manin's conjecture, 都の西北代数幾何学シンポジウム 2021 報告集 “接束の正值性とその周辺”, 102-118, (2021),

[プレプリント]

- I. Brian Lehmann and Sho Tanimoto, Classifying sections of del Pezzo fibrations, I, submitted,
- II. Roya Beheshti, Brian Lehmann, Eric Riedl, and Sho Tanimoto, Moduli spaces of rational curves on Fano threefolds, submitted,
- III. Roya Beheshti, Brian Lehmann, Eric Riedl, and Sho Tanimoto, Rational curves on del Pezzo surfaces in positive characteristic, submitted,

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 Tanimoto Sho	4. 巻 14-3
2. 論文標題 On upper bounds of Manin type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 731 ~ 761
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2020.14.751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Brian Lehmann and Sho Tanimoto	4. 巻 30-1
2. 論文標題 Rational curves on prime Fano threefolds of index 1	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 151-188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Marta Pieropan, Arne Smeets, Sho Tanimoto, Anthony Varilly-Alvarado	4. 巻 123-1
2. 論文標題 Campana points of bounded height on vector group compactifications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 57-101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms.1239	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Shimizu Nobuki, Tanimoto Sho	4. 巻 8-1
2. 論文標題 The spaces of rational curves on del Pezzo threefolds of degree one	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 291 ~ 308
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-021-00516-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Brian Lehmann and Sho Tanimoto	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Classifying sections of del Pezzo fibrations, II	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Brian Lehmann, Akash Kumar Sengupta, and Sho Tanimoto	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Geometric consistency of Manin's Conjecture	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Tanimoto	4. 巻 --
2. 論文標題 Movable Bend and Break for sections of del Pezzo fibrations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第64回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 209-220
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Tanimoto	4. 巻 2196
2. 論文標題 Campana points, Height zeta functions, and log Manin's conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録"解析的整数論の展望と諸問題"	6. 最初と最後の頁 26-36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Tanimoto	4. 巻 --
2. 論文標題 An introduction to Geometric Manin's conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 都の西北代数幾何学シンポジウム 2021 報告集 “ 接束の正值性とその周辺 ”	6. 最初と最後の頁 102-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計7件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Sho Tanimoto
2. 発表標題 Some updates on thin exceptional sets in Manin's conjecture
3. 学会等名 the IML program “ Number Theory: Rational points (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 谷本 祥
2. 発表標題 Rational curves on del Pezzo surfaces in characteristic p
3. 学会等名 都の西北代数幾何学シンポジウム 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sho Tanimoto
2. 発表標題 Campana points, Height zeta functions, and log Manin's conjecture
3. 学会等名 解析的整数論の展望と諸問題
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Sho Tanimoto
2. 発表標題 Classifying rational curves on Fano threefolds
3. 学会等名 The 19th Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 谷本 祥
2. 発表標題 Sections of del Pezzo fibrations over P^1
3. 学会等名 Rational points on Fano and similar varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷本 祥
2. 発表標題 Sections of del Pezzo fibrations over P^1
3. 学会等名 Rationality problems in algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷本 祥
2. 発表標題 Movable bend and break for sections of del Pezzo fibrations
3. 学会等名 第64回代数幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Sho Tanimoto's website
<https://shotanimoto.wordpress.com>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	レーマン ブライアン (Lehmann Brian)	ボストン カレッジ・Department of Mathematics・Associate Professor	
研究協力者	セングプタ アカシュ クマー (Sengupta Akash Kumar)	コロンビア大学・Department of Mathematics・PostDoc	
研究協力者	ベヘシティ ロヤ (Beheshti Roya)	セントルイス・ワシントン大学・Department of Mathematics and Statistics・Associate Professor	
研究協力者	リーデル エリック (Riedl Eric)	ノートルダム大学・Department of Mathematics・Assistant Professor	
研究協力者	ヴァリリー・アルヴァラード アンソニー (Varilly-Alvarado Anthony)	ライス大学・Department of Mathematics・Professor	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ピエロパン マータ (Pieropan Marta)	ユトレヒト大学・Department of Mathematics・Assistant Professor	
研究協力者	スミーツ アーネ (Smeets Arne)	ルーヴェン大学・Department of Mathematics・Associate Professor	
研究協力者	清水 伸紀 (Shimizu Nobuki)	熊本大学・自然科学教育部・修士課程学生 (17401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Rational points on Higher Dimensional Varieties	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
				他1機関
米国	Boston College	Washington University St. Louis	University of Notre Dame	
スイス	スイス連邦工科大学ローザンヌ校			
オランダ	Radboud Universiteit Nijmegen			