

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：13902

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14519

研究課題名（和文）幾何学及び組合せ論における量子アフィン代数の表現論的手法とその応用

研究課題名（英文）Representation theory of quantum affine algebras and its applications in geometry and combinatorics

研究代表者

渡邊 悠太（Watanabe, Yuta）

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：10824964

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の成果は以下の2点である。(1) ターウィリガー氏の先行研究にて証明無しで列挙されていたグラスマングラフのターウィリガー代数の規約加群を分類することに成功した。(2) 研究代表者の先行研究では、有限射影幾何の拡張された結合代数とクラス1の自明なアソシエーションスキームの一般化リース積との関連を見つけている。そのアソシエーションスキームにおいて、三重正則性を用いて、そのターウィリガー代数の規約加群を全て求めることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究結果は、理論的にも応用的にも重要な距離正則グラフのひとつであるグラスマングラフの構造を、量子アフィン代数という新しい視点で捉える点がポイントである。その視点により、未解決であったターウィリガー代数の規約加群を分類を完了することができた。また、アソシエーションスキームの一般化リース積は、置換群の一般化リース積の組合せの類似物として自然に定義されたものであるが、本研究結果により（一部の場合だけではあるが、）ターウィリガー代数の構造を決定することができたので、今後の応用に繋がる重要な結果であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：The results of this research project are the following two points. (1) We have succeeded in classifying all the irreducible modules for the Terwilliger algebra of the Grassmann graph, which were listed without proof in Terwilliger's paper. (2) In the previous work, we found a connection between the generalized wreath product of trivial one-class association schemes and the extended incidence algebra of finite projective geometry. Then we succeeded in finding all the irreducible modules for the Terwilliger algebra of the generalized wreath product by using the triple regularity.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：ターウィリガー代数 グラスマングラフ アソシエーションスキーム 一般化リース積

1. 研究開始当初の背景

有限射影幾何は、実験計画法で有用な組合せデザイン・直交配列の構成や、情報理論における誤り訂正符号などに活用されている。有限射影幾何の結合代数には、量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ からの全射準同型が存在しており、量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論を用いた研究が行われてきた。例えば、線型空間に対するエルデシュ・コ・ラドの定理がその例である。しかし、結合代数は大域的な組合せ構造しか反映していないため、完全な符号の分類などを行うためには、結合代数を拡張する必要があると言われてきた。近年、組合せ論の研究においても、結合代数に相当するボーズ・メスナー代数や量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を拡張する動きが進んでいる。例えば、距離正則グラフに関しては、ボーズ・メスナー代数を拡張したターウィリガー代数が導入され、その表現論を用いた研究が盛んになっている。また、 q -四面体代数に関しては、量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ より複雑な量子アファイン代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2\text{hat})$ との関連が見つかっている。

これまでの研究代表者の研究では、有限射影幾何の結合代数の拡張として、自己同型群の固定部分群の中心化代数を考察してきた。そしてこれらの代数(を中心で割ったもの)に量子アファイン代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2\text{hat})$ からの全射準同型が存在することを示し、有限射影幾何の新たな代数的及び組合せ的な性質を明らかにしている。有限射影幾何に限らず、旗多様体や距離正則グラフの枠組みで、量子アファイン代数の表現論を用いた理論体系の構築ができれば、旗多様体や距離正則グラフの理論の発展に寄与し、分類問題といった未解決問題への貢献が期待できると考え、当該研究計画を設定した。

2. 研究の目的

上記の背景を踏まえて、本研究の主な目的は以下の2点を設定した。

- (1) 有限射影幾何の新たな組合せ構造に着目することで、未解決問題への新たなアプローチを行う。先述の通り、組合せ論の研究においては、結合代数に相当するボーズ・メスナー代数を拡張したターウィリガー代数が導入され、その表現論を用いた研究が盛んになっている。そのため、研究代表者のこれまでの研究成果である、有限射影幾何の拡張された結合代数の構造を使って、グラスマングラフのターウィリガー代数の構造決定を試みることが考えられる。その他にも、線型空間におけるエルデシュ・コ・ラドの定理と呼ばれる組合せ構造に関する不等式の結合代数の表現論を用いた証明が知られているが、その拡張である特異線形空間上のエルデシュ・コ・ラド型の定理を、拡張された結合代数の表現論を用いてアプローチすることも考えられる。特異線形空間上の定理に関しては、一部のパラメータに関して組合せ的な証明が与えられているが、残りのパラメータに関しては未解決のまま残されている。
- (2) 双対極空間といった有限射影幾何に近い組合せ構造・幾何構造に対して、これまでの研究代表者の研究成果と同様のアプローチを行う。例えば、双対極空間の結合代数を適切に拡張することで、新たに量子アファイン代数の構造を見つけることが考えられる。

3. 研究の方法

上記の目的(1)と(2)に合わせて、それぞれ分けて記述する。

- (1) これまで結合代数における理論体系が確立されているものは、それを深く理解することで、拡張された結合代数に一般化できるのかを考察することが挙げられる。また、グラスマングラフのターウィリガー代数などにおいては、複雑な代数構造を多角的に捉えるアプローチが重要である。
- (2) 有限射影幾何から類似の組合せ構造・幾何構造へ拡張するためには、これまでの研究の本質的な部分を的確に捉えることが重要である。例えば、有限射影幾何のシューベルト胞体に関する議論では、一般のシューベルト胞体の理論体系として再記述を試みることで、本質的な部分が浮かび上がってくると考える。

4. 研究成果

本研究課題の成果は以下の2点である。

- (1) ターウィリガー氏の先行研究にて証明無しで列挙されていたグラスマングラフのターウィリガー代数の規約加群を分類することに成功した。本研究成果では、(本質的に)有限射影幾何への放物型部分群の作用を用いており、研究代表者の先行研究における拡張された結合代数の応用例のひとつと位置付けることができる。ターウィリガー代数は非可換な半単代数であり、“基本的な”距離正則グラフであってもその構造決定は困難とされている。本研究成果ではその一部の未解決問題の解決に貢献している。本研究成果は、論文としてまとめ上げ、査読付き論文として出版済みである。
- (2) 研究代表者の先行研究では、有限射影幾何の拡張された結合代数とクラス1の自明なアソシエーションスキームの一般化リース積との関連を見つけている。そのアソシエーションスキームにおいて、三重正則性を用いて、そのターウィリガー代数の規約加群を全て求めることに成功した。この結果はリース積のターウィリガー代数に関する既知の結果を完全に含んでおり、先行研究の拡張として位置付けることができる。本研究成果は国内研究集会で発表している。本研

究成果は論文としても公開予定であったが、クラス 1 の自明なアソシエーションスキームに限らず、任意の可換アソシエーションスキームにおいても、同様の議論ができそうな目処が立ったため、より一般的な定理の構築に向けて本研究課題の研究期間終了後も研究を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Liang Xiaoye、Ito Tatsuro、Watanabe Yuta	4. 巻 596
2. 論文標題 The Terwilliger algebra of the Grassmann scheme $J(N,D)$ revisited from the viewpoint of the quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 117 ~ 144
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2020.03.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 渡邊悠太
2. 発表標題 Generalized wreath products of association schemes over a double poset
3. 学会等名 第38回代数的組合せ論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊 悠太
2. 発表標題 一般化リース積のTerwilliger代数について
3. 学会等名 組合せ論サマースクール2019
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------