

令和 6 年 5 月 22 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14524

研究課題名（和文）Quotスキームを用いた小林-ヒッチン対応及びヒッグズ束への変分法的アプローチ

研究課題名（英文）Variational approach to Kobayashi-Hitchin correspondence and Higgs bundles by means of Quot-schemes

研究代表者

橋本 義規 (Hashimoto, Yoshinori)

大阪公立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60836485

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：滑らかな複素射影代数多様体上の正則ベクトル束について知られた小林-Hitchin対応と呼ばれる理論について研究を行った。非線形偏微分方程式論を用いた既存の方法に代えて、Donaldson汎関数と呼ばれるエネルギー汎関数の漸近挙動の解析と代数幾何でのQuotスキームを用いることで、変分法的観点から小林-Hitchin対応における微分幾何と代数幾何の関係を明らかにした。多くの関連する分野の話題についても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

小林-Hitchin対応は、Hermite-Einstein計量と呼ばれる非線形偏微分方程式の解の存在が代数幾何学的な安定性条件と同値であることを主張する非常に重要な定理である。本研究では、このような定理がなぜ成立するのかを、変分法的観点からより幾何学的直感に訴える形で理解するために重要な結果を示した。特に、Fubini-Study計量のQuotスキーム極限を定義することにより、極限Donaldson汎関数の漸近挙動を記述する代数的不変量を求めることに成功した。

研究成果の概要（英文）：This project concerned the Kobayashi-Hitchin correspondence for holomorphic vector bundles over a smooth complex projective variety. In place of the previous method using the theory of nonlinear partial differential equations, I analysed the asymptotic behaviour of an energy functional called the Donaldson functional, and employed the Quot-schemes in algebraic geometry, to clarify the relationship between differential and algebraic geometry from a variational point of view. I also worked on many related topics.

研究分野：幾何学

キーワード：小林-Hitchin対応 正則ベクトル束の安定性 Kaehler多様体上の標準計量

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

小林-Hitchin 対応とは、滑らかな複素射影代数多様体上の正則ベクトル束において、非線形偏微分方程式の解として微分幾何的に定義される Hermite-Einstein 計量が存在することと、代数幾何的安定性条件が同値であることを言う。これは重要な定理であるが、既存の証明は非線形偏微分方程式論を用いた高度に技術的な議論によって与えられており、微分幾何と代数幾何との関連を明示的に見ることは容易ではなかった。

2. 研究の目的

本研究では、非線形偏微分方程式論に代えて代数幾何での Quot スキームを用いることで、変分法的観点から小林-Hitchin 対応における微分幾何と代数幾何のより明示的な関係を明らかにすること、さらにその方法を Higgs 束などのより一般的な対象に拡張することで新しい知見を得ることが目的であった。そこでは汎関数の無限遠での傾きが重要な役割を果たすが、その手法を複素幾何学の他の問題にも応用することができないか探索的に研究することも重要な目的の一つである。

3. 研究の方法

研究の基本的なアイデアは、凸関数に関する初等的かつ専門家にはよく知られた次の結果である：実数全体で定義された凸関数が臨界点を持つことと、関数の無限遠での傾きが正になることが同値である。Hermite-Einstein 計量に関しては、Donaldson 汎関数と呼ばれる Hermite 計量全体の上で定義された汎関数が測地線に沿って凸となることが知られていた。これを用いると、Hermite-Einstein 計量の存在と汎関数の無限遠での傾きが正であることが同値であること、さらに、この条件と代数幾何学的安定性が同値であることを期待することは自然である。

Julien Keller 氏と申請者による共同研究において、Fubini-Study 計量と呼ばれる「代数的」な計量の族に沿った Donaldson 汎関数の無限遠での傾きが、正則ベクトル束の部分層のフィルトレーションを用いて定まる代数幾何学的不変量と一致することが分かった。この不変量を用いて、正則ベクトル束の安定性から Hermite-Einstein 計量の存在が従うという Donaldson-Uhlenbeck-Yau の定理を、偏微分方程式論の高度な議論を用いる既存の照明とは別に、変分法を用いてより幾何的な観点から可能な限り初等的な解析学を用いて理解することが本研究の目標であった。

4. 研究成果

(1) 小林-Hitchin 対応

上記において説明した、Quot スキームを用いて Donaldson 汎関数の無限遠での傾きを代数的不変量で表す定理に関しては、Julien Keller 氏との共著論文として EPIGA にて 2022 年に出版された。その後、Keller 氏との共著による論文 (Geom. Dedicata にアクセプト済み) において、Donaldson 汎関数の下限についてある種の一様評価が成り立つことを仮定すれば、初等的な解析学の結果のみを用いた変分的証明が可能であることを示した。この一様評価に関する仮定は高度に非自明であり、代数曲線などの簡単な場合でも、既存の非線形偏微分方程式論を用いずに証明することは難しかった。この仮定を外すためには真に新しいアイデアが必要だと考えている。このような強い仮定を置かなければならなかったことには不満が残るが、Donaldson-Uhlenbeck-Yau の方法とは全く異なる証明の道筋を与えることができたことについてはある程度評価できると考えている。さらに Keller 氏との 3 本目の共著論文 (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics にて出版済) において、上記の変分法と代数的不変量を用いた手法をベクトル束の balanced metric についても応用できることを示した。

Donaldson-Uhlenbeck-Yau の定理の初等的な別証明を与えるという本研究計画の目標は、完全な形ではないものの、ある程度の学問的意義をもつ結果を出すことができたと考えている。仮定せざるを得なかった Donaldson 汎関数の下限の一様評価については、多くの時間を割いて考えたが、非線形偏微分方程式論による既存の方法を用いないことは難しく、これに関して新規性の高い結果を出すことは現状では難しいと判断した。これに関連して、本研究課題と多くの類似点を持つ Jonsson-McCleerey-Shivaprasad による新たな変分法的アプローチが提案された。彼らのアイデアは、Donaldson-Uhlenbeck-Yau の定理の証明で用いられた weakly holomorphic bundle を用いる方法で、可能な限り初等的な解析学を用いようとする本研究計画とは異なる方針に基づいているが、変分的に自然な別証明を与えることに成功した。これは有力なアプローチであるので、申請者の Quot スキームを用いたアプローチとの相違点を模索することも含めて今後の研究課題として追求したいと考えている。

最後に、Higgs 束への拡張に関して、複数の専門家と今後の研究に有意義な議論を行うことがで

きたものの結果を出すことができなかつたことは悔やまれる点であるが、以下説明するような本研究課題と深く関連する別の研究問題について進展があったので、そちらの結果を出すことを優先した。

(2) Fano 多様体上の anticanonically balanced 計量や coupled Ding 安定性に関する研究

正則ベクトル束における Hermite-Einstein 計量や balanced 計量と同様に、Fano 多様体上では Kaehler-Einstein 計量やそれに付随する balanced 計量を考えることができる。申請者は、Fano 多様体上の anticanonically balanced 計量や関連する話題について以下述べるような結果を得た。まず、anticanonically balanced 計量の存在が齋藤-高橋が定義した F 安定性と呼ばれる安定性条件から導かれることを示した。さらに、その結果を coupled Kaehler-Einstein の場合に拡張する過程における副産物として、coupled Ding 安定の定義を改良した。具体的には、coupled Ding 安定の概念は Hultgren-Witt Nyström によって定義されていたが、複数のテスト配位間に複雑な関係性を要請する必要がある、安定性条件として弱すぎると考えられていた。申請者の研究では、そのような複雑な関係性を取り去る定義を与え、coupled Ding 安定の定義を強めて変分法的・解析的描像との対応が見やすくなるような定義を与えることに成功した。本論文は Ann. Global Anal. Geom. から出版された。この研究において coupled Kaehler-Einstein 計量及び coupled Ding 安定性について有益な知見を得ることができたので、今後の研究テーマの一つとして追求したいと考えている。

(3) ランダム小平埋め込み

複素射影空間に埋め込まれた代数多様体について、質量中心という量を定義することができる。これは埋め込まれた代数多様体の Chow 安定を判定することができる量であるが、本研究では埋め込みをランダム行列で動かした場合の期待値を計算し、どのような代数多様体でも質量中心の期待値は単位行列の定数倍になることを示した。この結果は J. Geom. Anal. より出版された。

(4) 錐的特異点を持つ定スカラー曲率 Kaehler 計量と安定性

青井顕宏氏と Kai Zheng 氏との共同研究において、錐的特異点を持つ定スカラー-Kaehler 計量の存在が適切な意味でのログ K-安定性を導くこと、また次数の高いジェネリックな因子に沿っては、錐的特異点を持つ定スカラー-Kaehler 計量が必ず存在することを示し、arXiv にてプレプリントを公開した。他にも、錐的特異点を持つ定スカラー曲率 Kaehler 計量について様々な結果を示した。

(5) 正則平坦線束に関する Hoermander 型の L2 評価

小池貴之氏との共同研究において、正則平坦線束に関する結果を得た (Kyoto J. Math. にてアクトセプト済み)。この結果は曲率が 0 となるような正則線束、つまり Hermite-Einstein 計量の非常に特殊な場合に関する結果であり、そのような正則線束の \bar{d} 作用素について一様に成り立つ Hoermander 型の L2 評価を得た。この一様評価の特徴は、正則平坦線束が自明なものに近づくにつれて L2 評価の定数が爆発する様子を定量的に評価できることである。さらに、この結果の系として、上田の補題と呼ばれる複素力学系で重要な結果の別証明を得ることに成功した。他 Ricci 平坦な多様体上の非自明正則平坦線束が Picard 多様体上で自明な線束に十分近いならばコホモロジーが消滅することも示した。この研究では、平坦線束のモジュライ空間 (の連結成分) である Picard 多様体が重要な役割を果たしたが、これは当初の研究計画のテーマである Quot スキームと大いに関係するアイデアに基づくものである。本研究では、Picard 多様体の座標系をうまく定めることにより、摂動 \bar{d} 作用素という作用素を新たに定義したことが一様評価を得る際に重要な役割を果たした。これは正則平坦線束の研究に際して他にも応用が期待できると感じている。

(6) 汎関数の臨界点の存在と無限遠でのスロープ

本研究課題のテーマである小林-Hitchin 対応は Kempf-Ness 定理と呼ばれる有限次元の定理の無限次元版とみなせるものであるが、そこでの中心的なアイデアとなっている「汎関数の臨界点の存在と無限遠での傾き」の関連について、有限次元の場合は内容自体は広く知られた結果であっても詳細に書かれた証明を文献から見つけることは難しかった。申請者は、この関連について詳細な証明を与えた上で、その証明が locally compact complete length metric space にも拡張できることを示した。この証明と、申請者のこれまでの研究で得た結果の一部のサーベイを合わせて、Springer Proceedings in Mathematics & Statistics にて発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yoshinori Hashimoto	4. 巻 447
2. 論文標題 Balanced Metrics for Extremal Kaehler Metrics and Fano Manifolds	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 In: Hirachi, K., Ohsawa, T., Takayama, S., Kamimoto, J. (eds) The Bergman Kernel and Related Topics. HSCCV 2022. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 169 ~ 188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-99-9506-6_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshinori Hashimoto	4. 巻 64
2. 論文標題 Anticanonically balanced metrics and the Hilbert--Mumford criterion for the δ -invariant of Fujita--Odaka	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 1 ~ 40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10455-023-09911-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshinori Hashimoto and Julien Keller	4. 巻 409
2. 論文標題 Quot-Scheme Limit of Fubini--Study Metrics and Its Applications to Balanced Metrics	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 In: Cheltsov, I., Chen, X., Katzarkov, L., Park, J. (eds) Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 281 ~ 312
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-031-17859-7_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshinori Hashimoto	4. 巻 32
2. 論文標題 Expected Centre of Mass of the Random Kodaira Embedding	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-021-00778-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yoshinori Hashimoto, Julien Keller	4. 巻 5
2. 論文標題 Quot-scheme limit of Fubini-Study metrics and Donaldson's functional for vector bundles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 1--38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.46298/epiga.2022.6577	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 橋本義規	4. 巻 1
2. 論文標題 小林-Hitchin対応への変分法的アプローチに対するQuotスキームの応用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第67回 幾何学シンポジウム 予稿集	6. 最初と最後の頁 145-154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計32件 (うち招待講演 27件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 非自明平坦線束に対する一様Hoermander評価
3. 学会等名 大阪大学幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Uniform Hoermander estimates for flat nontrivial line bundles
3. 学会等名 UQAM Geometry and Topology Seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Uniform Hoermander estimates for flat holomorphic line bundles
3. 学会等名 The 7th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Uniform Hoermander estimates for flat holomorphic line bundles
3. 学会等名 Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Recent developments on constant scalar curvature Kaehler metrics with cone singularities along a divisor
3. 学会等名 The 8th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 因子に沿って錐的特異点をもつ定スカラー曲率Kahler計量についての最近の進展
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Uniform Hormander estimates for flat nontrivial line bundles
3. 学会等名 OCAMI微分幾何セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Coupled Ding stability and related topics
3. 学会等名 The 28th Symposium on Complex Geometry (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 相对満汎関数についての簡単な観察
3. 学会等名 専門家向け勉強会「ケーラー多様体上の標準計量とその周辺 3」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 因子に沿って錐的特異点をもつ定スカラー曲率Kaehler計量について
3. 学会等名 OCAMI複素解析セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 標準計量，幾何学の不变式論，ベルグマン核
3. 学会等名 大阪公立大学数学研究所談話会，
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Uniform Hormander estimates for flat holomorphic line bundles
3. 学会等名 1day workshop on dynamical systems and complex geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Some recent results on constant scalar curvature Kaehler metrics with cone singularities
3. 学会等名 CCG workshop "Complex Analytic Geometry" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Donaldson's quantisation: extremal Kahler metrics and Fano manifolds
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXIII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Expected centre of mass of the random Kodaira embedding
3. 学会等名 The 27th Symposium on Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Anticanonically balanced metrics and the Hilbert-Mumford criterion for the δ_m invariant of Fujita-Odaka
3. 学会等名 The 6th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 藤田-尾高の δ_m 不変量のHilbert-Mumford型基準とanticanonically balanced計量
3. 学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Expected centre of mass of the random Kodaira embedding
3. 学会等名 Seminaire Analyse, IRMA, Universite de Strasbourg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Anticanonically balanced metrics and the Hilbert-Mumford criterion
3. 学会等名 Minicourse at Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 小林-Hitchin対応への変分法的アプローチに対するQuotスキームの応用
3. 学会等名 第67回 幾何学シンポジウム (基調講演) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 ランダム小平埋め込みの質量中心の期待値
3. 学会等名 日本数学会 2021 年度年会 (一般公演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Stability
3. 学会等名 Maths Seminar at Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Applications of the Quot-scheme limit to variational aspects of the Hermitian-Einstein metric
3. 学会等名 複素解析幾何セミナー（東大数理）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 Expected centre of mass of the random Kodaira embedding
3. 学会等名 Tokyo Tech - Uppsala University 7th Joint Symposium（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋本義規
2. 発表標題 ランダム小平埋め込みの質量中心の期待値
3. 学会等名 幾何学セミナー（九州大学）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Variational aspects of the Kobayashi-Hitchin correspondence and the Quot-Scheme limit
3. 学会等名 The 3rd Symposium in Geometry and Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Variational aspects of the Kobayashi-Hitchin correspondence and the Quot-Scheme limit
3. 学会等名 Trends in Modern Geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Variational aspects of the Kobayashi-Hitchin correspondence and the Quot-scheme limit
3. 学会等名 Younger generations in Algebraic and Complex geometry VI (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 ariational aspects of the Hermitian-Einstein metrics and the Quot-Scheme limit
3. 学会等名 Seminar at Tongji University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Variational aspects of the Hermitian-Einstein metrics and the Quot-Scheme limit
3. 学会等名 Seminar at Xiamen University (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Canonical metrics, Geometric Invariant Theory, and the Bergman kernel
3. 学会等名 Colloquium at ShanghaiTech University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Hashimoto
2. 発表標題 Introduction to Geometric Invariant Theory
3. 学会等名 The 4th CAGWS Complex Algebraic Geometry Winter School (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	Universite du Quebec a Montreal			
中国	Tongji University			