

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14529

研究課題名（和文）Clifford-Klein形とDolbeaultコホモロジー

研究課題名（英文）Clifford-Klein forms and Dolbeault cohomology

研究代表者

森田 陽介（Morita, Yosuke）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：70804318

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：1) F. Kassel・N. Tholozan両氏との共同研究で、等質空間がコンパクト商を持つのは、ある球面束が自明束とfibrewiseホモトピー同値なときに限ることを示した。K0理論のAdams作用素の計算により、コンパクト商を持たない等質空間の新しい例を数多く得た。
2) 位相力学系の孤立不変集合に対してConley指数という不変量が定義される。既存の定義は指数対(N,L)を用いるが、私はN-Lのみが本質的なことに着目し、よりシンプルなConley指数の定義を与えた。またcondensed setを用いるとConley指数をpoint-set levelで自然に定義することを観察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1) 等質空間のコンパクト商の存在問題は、1980年代後半から多くの数学者によって様々な方法で研究されてきた。今回我々が与えた必要条件是、多くの場合で既存の結果を大幅に改良する強力なものである。また K0 理論・Adams 作用素といった代数トポロジーの重要概念と結びついている点でも興味深いと思う。
2) Conley 指数は力学系の研究において、純粋数学・応用の双方で広く用いられている道具である。また Floer 理論の定式化でも用いられている。今回与えた Conley 指数の定式化の改良が、こうした分野の研究に役立つことを期待している。

研究成果の概要（英文）：1) In joint work with Fanny Kassel and Nicolas Tholozan, we prove that a (non-Riemannian) reductive homogeneous space can admit a compact quotient only when a certain sphere bundle on the homogeneous space is fibrewise homotopy equivalent to the trivial sphere bundle. Using the Adams operations on K0-theory, we obtained many examples of homogeneous spaces for which our necessary condition is not satisfied (and hence, compact quotients do not exist).
2) The Conley index is an invariant for isolated invariant subsets in topological dynamical systems. Usually, it is formulated using an index pair (N, L). I gave a new, simpler formulation of the Conley index, based on an observation that only the difference set $N - L$ is important in Conley index theory. I also observed that one can naturally define Conley indices in the point-set level if one uses condensed sets, a generalization of topological spaces.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学 Lie群 等質空間 固有な作用 Clifford-Klein形 K理論・K0理論 Conley指数 condensed set

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

1) G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有かつ自由に作用するとき、商空間は G/H を局所的なモデルに持つ多様体となる。このような多様体を Clifford-Klein 形という。 G/H が非 Riemann (H が非コンパクト) な状況では、 Γ の作用が固有とは限らないため、Riemann な状況と比べて Clifford-Klein 形の研究は格段に難しくなる。1980 年代後半の小林俊行氏の研究 [3] を端緒として、非 Riemann 等質空間の Clifford-Klein 形の大域幾何学は過去 35 年ほどの間に様々な手法を用いて研究されてきた (Lie 群論、エルゴード理論、コホモロジー、Anosov 表現など)。

特に、「与えられた等質空間 G/H がコンパクトな Clifford-Klein 形 (しばしば単にコンパクト商と呼ばれる) を持つか否か判定せよ」という問題は、多くの研究者の興味を集めてきたが、現在も、擬 Riemann 双曲空間 $H^{\{p,q\}} = P^0(p,q+1)/P^0(p,q) \times O(1)$ を含む多くの場合に未解決である。私はこれまで主にコホモロジー的な手法を用いて、この問題を研究してきた。

2) Conley 指数は、位相力学系の孤立不変集合に対して定義される、ホモトピー的な不変量である。Conley 指数は力学系自体の研究 (純粋・応用数学双方) に加え、Seiberg-Witten-Floer homotopy type の定式化にも用いられている (Manolescu [4])。

Conley 指数はこれまで、指数対 (N, L) と呼ばれる概念を用いて定義されてきたが、既存の定式化には、「理論の見通しが悪い」「ホモトピー型しか定義されない」などの不満点があった。

2. 研究の目的

1) 非 Riemann 等質空間がコンパクトな Clifford-Klein 形を持つための新しい必要条件を与えることが研究の目的である。本研究費を申請した段階では、 G/H が G -不変な複素構造を保つ場合 (例えば半単純 Lie 群の楕円軌道の場合) に、de Rham コホモロジーの代わりに Dolbeault コホモロジーを用いることで新しい必要条件を得ることを考えていた。しかし 2019 年度にフランスの Fanny Kassel・Nicolas Tholozan 両氏とおこなった研究議論で、球面束のホモトピー論の言葉を用いて記述される新しい必要条件を発見したので、研究期間中はこちらの研究を主におこなった (詳しくは 3 を参照)。

2) Conley 指数の新しい定式化を与えることが研究の目的である。Robbin-Salamon [7] の論文にヒントを得て、私は指数対 (N, L) 自体は重要でなく、その差集合 $N-L$ のみが Conley 指数理論において重要であるべきだと考えた。差集合 $N-L$ が満たす性質をうまく抽象化し、それを用いて Conley 指数の新しい定義を与えることができれば、既存の定式化よりもシンプルで見通しがよいものになると考えた。

3. 研究の方法

1-a) Tholozan 氏および私の過去の研究 ([5], [9]) で、 G/H のコンパクト商の存在問題を考える際に、double fibration $G/H \rightarrow G/K \rightarrow H \rightarrow G/K$ (ただし K は G の極大コンパクト部分群で、 $K \cap H$ も H の極大コンパクト部分群になるとする) を考えることの重要性がわかっていった。以前の研究ではこの double fibration の de Rham コホモロジーを考えていたが、より直接的に、 $G/H \rightarrow G/K \rightarrow H$ の Γ -同変な切断を取り、幾何学的な議論を行うことで、より精密な結果を得ることを目指した。

1-b) 1-a) の手法で得られた必要条件是、球面束のホモトピー論の言葉を用いて記述される (詳しくは 4 を参照)。この条件を種々の具体例で確かめることは非自明な代数トポロジーの問題である。そこで様々な等質空間について、 KO 理論およびその上の Adams 作用素の計算を行い、我々の条件がいつ成り立つかを確かめた。

2) 2 の 2) で述べた通り、「Conley 指数理論において重要なのは指数対 (N, L) ではなく、その差集合 $N-L$ のみである」という思想に基づき、Conley 指数理論の新しい定式化を目指した。 $N-L$ が満たす重要な性質は、その 1 点コンパクト化上に誘導される力学系が、連続になることである。そこでこの条件のみを用いて Conley 指数の定式化ができないかと考えた。

4. 研究成果

以下の 1-a), 1-b) は Fanny Kassel・Nicolas Tholozan 氏との共同研究である。

1-a) G/H を簡約型等質空間とし、 $K/K \cap H$ の G/H 内での法束を N 、その単位球面束を $S(N)$ とする。このとき、 G/H がコンパクト商を持つためには、 $S(N)$ が自明球面束と fibrewise ホモトピー同値でなければならないことを証明した。この結果の証明は、次のようにして行う：
 まず、次のようにして $(K/K \cap H) \times (p \cap q)$ から N への写像 f を構成する（ここで p, q はそれぞれ $k = \text{Lie}(K)$, $h = \text{Lie}(H)$ の $g = \text{Lie}(G)$ における直交補空間）：
 ・ 1-a) で述べた切断を利用すると $p \cap q$ から G への写像 f が得られる。
 ・ $(K/K \cap H) \times (p \cap q)$ の元 (x, X) に対して、 $f(X)x$ という G/H の元が定まる。 N は G/H と微分同相であるから（小林 [3]）、これは $(K/K \cap H) \times (p \cap q)$ から N への写像とみなせる。これを f と呼ぶ。
 ここでさらに代数トポロジーの議論（ファイバー束の lifting property）を用いると、 f を連続変形することで $S(N)$ と自明球面束 $K/K \cap H \times S(p \cap q)$ の間のホモトピー同値が得られることがわかる。

1-b) まず、 $G/H = H^{\wedge}\{p, q\}$ がコンパクト商を持つのは、 p が $2^{\wedge}\{h(q)\}$ で割り切れることと同値だとわかった（ただし $h(q)$ は $\lfloor q/2 \rfloor$ または $\lfloor q/2 \rfloor + 1$ のいずれかで、どちらになるかは $q \bmod 8$ で決まる）。これは Adams による球面上のベクトル場の問題の解決 [1] で用いられた計算から直ちに従う。この結果は、既存の結果を大きく改良するものである。
 一般に、Adams 予想 [2]（Quillen [6] によって解決）によって、 $S(N)$ がいつ自明球面束と安定 fibrewise ホモトピー同値になるかは、 KO 理論の Adams 作用素によって判定できることがわかっている。我々は KO 理論の Gysin 完全列や、等質空間の accidental 同型などをうまく利用して、種々の例に対して計算を行った。その結果、 G/H が既約な対称空間の場合に、4 つの系列を除くすべての場合でコンパクト商の存在問題を解決できた。また $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ が任意の $n > m > 1$ に対してコンパクト商を持たないことなどもわかった。

2) 上述 2, 3 の 2) で述べた思想に基づき、Conley 指数理論の新しい定式化を与えた。位相力学系 (X, f) に対し、 X の局所閉部分集合 E が f -compactifiable であることを、 E の 1 点コンパクト化 E^+ 上に f から誘導される力学系が連続であることとして定義した。これは、 E 上に誘導される partial map $f|_E$ が、openly defined かつ固有であることと同値である。さらに X の局所閉部分集合の間に、「 f で有限時間流した分の違いを除いて、同じ大きさ」という同値条件 \sim_f を定義した。 \sim_f について同値な 2 つの f -compactifiable 部分集合に対して、「 f に沿って流す」ことで自然な連続写像が定まることを示し、さらに X 上の孤立 f -不変集合 S に対し、 f -compactifiable な部分集合の \sim_f 同値類が自然に定まることを示した。これらによって、 S の Conley 指数の新しい定義が得られる。新しい定式化においては、必要な条件がよりシンプルなこと、また「誘導される力学系が連続」という条件が「openly defined」「固有」の 2 つに分割可能なことから、議論が全体に非常に見通しのよいものとなった。
 さらに、Clausen-Scholze [8] が近年提唱している、位相空間を一般化した condensed set と呼ばれる概念を用いると、Conley 指数が point-set level で定義可能であることを観察した。

< 引用文献 >

- [1] J. F. Adams, Vector fields on spheres. *Ann. of Math.* (2) 75 (1962), 603-632.
- [2] J. F. Adams, On the group $J(X)$ - I. *Topology* 2 (1963), 181-195.
- [3] T. Kobayashi, Proper actions on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.* 285 (1989), 249-263.
- [4] C. Manolescu, Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$. *Geom. Topol.* 7 (2003), 889-932; Errata: arXiv:math/0104024v5.
- [5] Y. Morita, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms. *Selecta Math.* (N.S.) 23 (2017), 1931-1953.
- [6] D. Quillen, The Adams conjecture. *Topology* 10 (1971), 67-80.
- [7] J. W. Robbin and D. Salamon, Dynamical systems, shape theory and the Conley index. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 8* (1988), Charles Conley Memorial Issue, 375-393.
- [8] P. Scholze, Lectures on condensed mathematics. Lecture notes for course at the University of Bonn. Available at <https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Condensed.pdf>
- [9] N. Tholozan, Volumes and non-existence of compact Clifford-Klein forms. Preprint, arXiv:1511.09448.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yosuke Morita	4. 巻 -
2. 論文標題 Cartan projections of some non-reductive subgroups and proper actions on homogeneous spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transform. Groups (Online first publication)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-022-09736-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yosuke Morita	4. 巻 25
2. 論文標題 Conley index theory without index pairs. I: the point-set level theory	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Fixed Point Theory Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11784-022-01037-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yosuke Morita	4. 巻 26
2. 論文標題 Correction to: Conley index theory without index pairs. I: the point-set level theory	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 J. Fixed Point Theory Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11784-023-01094-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 18件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Conley 指数理論の新しい定式化について
3. 学会等名 幾何学・トポロジー合同セミナー（九州大学）（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 非 Riemann 等質空間の Clifford-Klein 形の幾何学
3. 学会等名 数理談話会 (九州大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 Conley index theory and condensed sets
3. 学会等名 Arbeitstagung 2023 on Condensed Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Conley 指数の定義について
3. 学会等名 Geometry and Topology (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Sphere bundles, K0-theory, and vector fields on spheres (after Adams)
3. 学会等名 Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis"
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 コンパクト商を持たない非 Riemann 等質空間について
3. 学会等名 第62回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 The existence problem of compact Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous spaces
3. 学会等名 7th Tunisian-Japanese Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications" in Honor of Professor Toshiyuki Kobayashi (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 The existence problem of compact quotients of homogeneous spaces
3. 学会等名 Seminaire Geometrie et applications (Universite de Strasbourg) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 The existence problem of compact quotients of homogeneous spaces
3. 学会等名 Seminaire Geometrie Topologie Dynamique (Universite Paris-Saclay) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 The existence problem of compact quotients of pseudo-Riemannian homogeneous spaces
3. 学会等名 Zariski dense subgroups, number theory and geometric applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Morse theory on the loop spaces of Lie groups and manifolds with hyperpolar actions (after Bott, Bott-Samelson, Conlon)
3. 学会等名 Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis"
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 A new framework for Conley index theory
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XIV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 非簡約な部分群の Cartan 射影とコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題
3. 学会等名 リー群論・表現論セミナー (東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 非簡約な閉部分群の Cartan 射影と等質空間のコンパクト商
3. 学会等名 リー群論、表現論およびその周辺分野（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Conley 指数について
3. 学会等名 Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis"
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 非 Riemann 等質空間のコンパクト商の存在問題
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 指数対を使わない Conley 指数理論
3. 学会等名 京都力学系セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 The Conley index of topological dynamical systems
3. 学会等名 iTHEMS 数学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Conley 指数の定義について
3. 学会等名 リー群論・表現論セミナー（東京大学）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 Cartan projections of abelian horospherical subgroups and proper actions on homogeneous spaces
3. 学会等名 表現論とその周辺分野の進展（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森田陽介
2. 発表標題 A generalization of the ping-pong lemma
3. 学会等名 リー群の群作用と大域解析に関するセミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Morita
2. 発表標題 Cartan projections of some nonreductive subgroups
3. 学会等名 Seminaire de Mathematique (Institut des Hautes Etudes Scientifiques) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	Institut des Hautes Etudes Scientifiques	Ecole normale superieure	