様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ２７ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：若手研究
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ１４５３１

研究課題名（和文）一般化ルート系に付随するワイル群の不変式論とフロベニウスおよび齋藤構造

研究課題名（英文）Weyl group invariant theory, Saito and Frobenius structures

研究代表者

白石　勇貴（Shiraishi, Yuuki）

大阪大学・インターナショナルカレッジ・講師

研究者番号：４０７７３９９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：シンプレクティック幾何学・複素幾何学・表現論の重要な数値不変量をその接層に反映する複素多様体がフロベニウス多様体です．その同型はそれらの幾何学や表現論の非自明な関係性を意味し，ミラー対称性予想と呼ばれます．これらの幾何学的・表現論的対象のホモロジー代数的な性質から構成される導来圏のどの圏論的構造から，フロベニウス多様体が復元出来るかの糸口を，具体例に対してですが，発見しました．

研究成果の学術的意義や社会的意義
これまで，フロベニウス多様体の同型は一意性定理等の間接的な方法で示されてきました．導来圏の同値からこの同型を導くことによって，それぞれの幾何学や表現論の重要な数値的不変量の間のより内在的な理解に繋がります．この計画はKontsevich氏により提起されました．導来圏からどのようにフロベニウス多様体を構成するかには有力な候補と様々な進展があるものの未だ謎が多く，その解決の一歩に本研究は貢献しました．

研究成果の概要（英文）：A Frobenius manifold is a complex manifold reflecting important numerical invariants from symplectic geometry, complex geometry and representation theory, on its tangent sheaf. A conjectural isomorphism among Frobenius manifolds implies non-trivial relations among these geometries and representation theory, and is called mirror symmetry conjecture. Derived categories of objects in these geometries and representation theory are constructed from their homological algebraic natures. This research found a clue for constructing a Frobenius manifold from their categorical structure though we only checked this for some concrete examples.

研究分野：幾何学

キーワード：原始形式　ワイル群不変式論　平坦・フロベニウス構造　安定性条件の空間　導来圏

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

フロベニウス多様体とは，その接層が積構造と両立する非退化対称双線形形式を持つ単位的・結合的な可換代数（可換フロベニウス代数）の平坦な族となる複素多様体であり，この積構造がWDVV方程式と呼ばれる非線形連立偏微分方程式を満たす正則関数（ポテンシャル）の三階微分で記述されるものである．次の三種類の構成方法がある((2),(3)の構成の場合には，フロベニウス多様体ではなく，平坦構造と呼ぶことが適切である)：

(1)安定写像の数え上げ不変量により積構造を変形した量子コホモロジー環とポアンカレ形式,
(2)良い正則関数の普遍変形族のヤコビ環と特殊な微分形式（原始形式）でtwistされた留数,
(3)拡大ワイル群の不変式論とカルタン行列から定まる交叉形式を単位方向で微分した形式.

これらのフロベニウス多様体が同型になるという予想が，古典的ミラー対称性である．

従来は具体例に応じた一意性定理等によって，間接的に古典的ミラー対称性は示されていた．それぞれの幾何学や表現論から構成される導来圏の同値（ホモロジー的ミラー対称性）を用い，より内在的に証明する計画が Kontsevich 氏により提出された．このとき，導来圏の圏論的構造からフロベニウス構造を構成するいくつかの予想的手法が提案されている．

２．研究の目的

用いる導来圏の種類（連接層の導来圏か，導来深谷圏か）と手法（グロタンディーク群と一般化ルート系か，ホッホシルトコホモロジー環・ホモロジー群）の組み合わせにより，どのような幾何学・表現論的背景を持つフロベニウス多様体が得られるかが変化する．齋藤恭司氏による孤立超曲面特異点の普遍変形理論と原始形式の周期積分，その周期領域であるワイル群軌道空間上の自然な（カルタン行列を交叉形式として持つ）平坦構造の構成の一般化として，次を研究目的とした：

(1)充満強例外列を持ち，多くの具体例が満たす良い条件を満たす三角圏から構成される一般化ルート系のワイル群不変式論による軌道空間上に自然な平坦構造の構成.
(2)更に，半無限ホッジ理論や原始形式の周期積分の理論の圏論的復元，つまり，安定性条件の空間と(1)の平坦構造の整合性の確立.

３．研究の方法

現在までに，ワイル群不変式論による軌道空間上に自然な平坦構造の構成は幾つかの限られたクラスに対してしか行われていない．このため，次の研究を実施した：

(1)拡大カスピダルワイル群や，ℓ-クロネッカー箙に付随する一般化ルート系のワイル群などの重要なクラスのワイル群不変式論による軌道空間上に自然な平坦構造の構成.

また，導来圏のどの圏論的構造が，それに付随する一般化ルート系から平坦構造を構成するために必要であるかを突き止めることが本研究の中核となる．このため，次の研究を実施した：

(2)端が軌道体射影直線である射影直線の鎖や，二点の軌道体点を持つ軌道体射影直線の環の非可換特異点解消の導来圏や，そのミラーである点付き境界を持つ種数０，種数１の曲面の部分巻き深谷圏から構成される一般化ルート系からの自然な平坦構造の構成.

４．研究成果

(1)高橋氏（大阪大）・池田氏（城西大）・大谷氏（大阪大）と共に，ℓ-クロネッカー箙に付随する一般化ルート系のワイル群不変式論によって，その軌道空間上にカルタン行列を交叉形式として持つ自然な平坦構造を構成した．コクセター元は対応する導来圏のセール函手の-1シフトから得られる．このコクセター元の固有値・固有ベクトルが不変式論構成に重要な役割を果たすことが分かった．また，不変式論から定まる領域と安定性条件の空間には差があること，周期のモノドロミー群としてのワイル群との整合性の観点から，後者がこの平坦構造の自然な底空間であることが判明した．以上の内容は既に学術論文として発表後，専門誌に採録された．また，幾つかの研究集会において講演を行った．

(2)高橋氏（大阪大）・池田氏（城西大）・大谷氏（大阪大）と共に，端が軌道体射影直線である射影直線の鎖や，二点の軌道体点を持つ軌道体射影直線の環の非可換特異点解消，そのミラーである点付き境界を持つ種数 0，種数１の曲面の充満形式弧系から定まる一般化ルート系の研究を行い，次の結果を得た：

①　射影直線の鎖の非可換特異点解消のヴェルディエ商，ミラーである点付き境界を複数持つ円筒から得られる一般化ルート系のコクセター・ディンキン図が，梯子型であることを示した．これは齋藤の分類において，その幾何学的由来が判明していなかったものである．ホモロジー的ミラー対称性の観点からある微分形式が重要になる．それを用いて，この点付き境界を持つ円筒に付随する LG 模型の変形理論に対する平坦構造が定まることを示した．そのポテンシャルと，平坦座標を具体的に計算した．更に，この微分形式が原始形式となることを示した．現在，この一般化ルート系のワイル群の拡大のメカニズムに原始形式が深く関わっていることが予想され，その拡大ワイル群の不変式論による平坦構造構成の研究を継続中である．

②　射影直線の環の非可換特異点解消のミラーである点付き境界を持つトーラスについて，ホモロジー的ミラー対称性の観点から標準的な微分形式が重要になる．この標準的な微分形式が原始形式となることを示した．この平坦構造のポテンシャルの特徴付けや一意性定理に必要な初期条件についての考察を行った．

③　池田氏によって，点付き境界を三つ持つ種数 0 の曲面の充満形式弧系から得られる一般化ルート系のワイル群の合同部分群による拡大に対する不変式論が構成された．①と②における軌道体射影直線の鎖や環の非可換解消や，そのミラーとなる点付き境界を持つ曲面と原始形式から構成される平坦構造と同型ではない，違う幾何学的背景を持つ平坦構造が，この拡大ワイル群の軌道空間上に構成されると予想される．この軌道空間上の自然な平坦構造の構成の研究を継続中である．この平坦構造に対応する原始形式の候補を同定し，証明の試みも継続中である．

以上の研究内容の発展を現在も継続中であり，結果を随時共著論文として取りまとめている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Ikeda Akishi、Otani Takumi、Shiraishi Yuuki、Takahashi Atsushi	４．巻 112
２．論文標題 A Frobenius manifold for $$\ell $$-Kronecker quiver	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Letters in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-022-01506-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 白石勇貴（登壇者），高橋篤史，池田暁志，大谷拓己
２．発表標題 ℓ-クロネッカー箙から構成されるフロベニウス多様体
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会一般講演
４．発表年 2022年

１．発表者名 白石勇貴
２．発表標題 A Frobenius manifold for l-Kronecker quiver
３．学会等名 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Yuuki Shiraishi
２．発表標題 Natural Saito structures on orbit spaces of duality groups
３．学会等名 Interaction Between Algebraic Geometry and QFT（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

＿

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関