

令和 5 年 5 月 19 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14533

研究課題名(和文)特異点及び特異計量を持つ曲面の微分幾何学的研究

研究課題名(英文)Study of surfaces with singular points and singular metrics

研究代表者

寺本 圭佑(Teramoto, Keisuke)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・助教

研究者番号：10830002

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文):特異点を持つ曲面について、その焦面やガウス写像に現れる特異性を幾何学的性質を用いて特徴づけた。特に、有界なガウス曲率を持つカusp边に対して、特異曲率の符号とガウス曲率の符号をガウス写像に現れる特異点型を用いて特徴づけた。さらに、ある表現公式で与えられる曲面の特異点の存在・非存在や特異点における幾何学的不変量の性質を明らかにした。

3次元ミンコフスキー空間内の特異計量を持つ曲面(混合型曲面)については、光的点集合の像と光円錐の接触を考察することで、二種類の光的可展面の定義を与えた。さらに、光的可展面に現れる特異点の特徴づけを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、特異点を持つ曲面の微分幾何学的研究は急速に発展している。本研究では、波面やフロントという特異点を許容する曲面のクラスにおいて、外的な微分幾何学の研究を行った。これは、曲面のガウス写像やそれを用いて定義される曲面に現れる特異点を考察することで、初期曲面の幾何学的性質を明らかにできるという意義を持つ。この方法において、波面に対して新たな幾何学的性質を明らかにした。

また、3次元ミンコフスキー空間は不定値な計量を持つ空間であり、曲面が正則でもその誘導計量が退化する点を持ちうる。このような曲面に対しても、特異点論を用いることで、微分幾何学が展開できることを示した。

研究成果の概要(英文):For surfaces with certain singular points (fronts or frontals), we clarified singularities appearing on their focal surfaces and Gauss maps by using geometric properties of fronts. In particular, for cuspidal edges with bounded Gaussian curvature, we characterized the sign of the singular curvature and of the Gaussian curvature via singularities of the Gauss map.

Moreover, we clarified the existence/ non-existence of singularities appearing on surfaces which are given by certain representation formulae. In addition, we gave characterizations of geometrical properties near singular points for such surfaces.

For surfaces with singular metric (mixed type surfaces) in Minkowski 3-space, we observed contact of the image of lightlike points on that surfaces with lightcone. As a result, we defined two lightlike developable surfaces. For these lightlike developable surfaces, we characterized singularities of them by geometric properties of corresponding mixed type surfaces.

研究分野：特異点論

キーワード：フロント 焦面 ガウス写像 特異点 混合型曲面 フロント

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

フロントやフロンタルと呼ばれる特異点を許容する曲面の微分幾何学的性質の研究が、近年活発に行われている。これらの曲面は特異点においても単位法ベクトル(あるいはガウス写像)がなめらかに拡張できるという良い性質を持っている。これまでの研究において、特異点におけるガウス曲率、平均曲率、主曲率の振る舞いや、特異点において定義される不変量の研究が中心に行われてきた。一方、フロントのガウス写像や焦面については、重要な曲面のクラスであるが、これまであまり多くの研究が行われていなかった。そこで、ガウス写像や焦面を考察することで、初期フロントの特異点における幾何学的性質がより明らかにされると考えられた。また、ワイエルシュトラス型表現公式で与えられる曲面に対して、その特異点に対する表現公式のデータによる特徴づけや、特異点における幾何学的性質について調べることで、その曲面のクラスに対する幾何学的な性質がより浮き彫りになることが考えられた。

一方、3次元ミンコフスキー空間内の曲面に混合型曲面と呼ばれるクラスがある。この曲面は、はめ込まれているが、誘導計量が正定値、不定値、退化する点の集合を持つという性質を持つ。この退化する点が光的点であり、誘導計量の特異点集合と考えることができる。この曲面の光的点において、いくつかの不変量を定義したが、より深く研究することで、混合型曲面の理論を発展させることができると考えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、

- (1) フロントのガウス写像や焦面に現れる特異点とフロントの幾何学的性質の関係を明らかにすること
- (2) フロンタルの主曲率関数の特異点における挙動を調べること
- (3) ある表現公式で与えられる曲面の特異点と特異点における幾何学的性質を明らかにすること
- (4) 混合型曲面に対して、光的点集合の像と光円錐との接触を明らかにすることである。

3. 研究の方法

(1) フロントのガウス写像の特異点については、二次元多様体間の写像に現れる特異点の判定条件を応用することで調べる。また、焦面に現れる特異点については、フロントの特異点の判定法や同次元多様体間のモラン写像の特異点の判定条件などを用いて行う。その際、正則曲面の場合と同様に主曲率関数から得られる幾何学的量が特徴づけに関して重要な役割を果たすと考えられる。そのため、特異点におけるフロントの主曲率関数の振る舞いの解析を行う。

(2) フロンタルの主曲率関数の特異点における振る舞いについては、適切な座標を用いて解析を行う。その際、特異点論における基本的な手法である因子の補題を用いる。また、特異点において定義される不変量を使いやすい形で表示し、主曲率の振る舞いとの関係を調べる。

(3) ある表現公式で与えられる曲面は、複素解析的なデータを用いて与えられるので、研究では複素関数論及び特異点論を用いる。また、これまでに得られている極大曲面や空間的平均曲率一定曲面の理論、双曲空間内の平坦曲面に対する理論を用いて研究を遂行する。

(4) 混合型曲面の光的点集合(の像)に沿った適切な関数(族)を定めて研究を行う。このとき、関数の開折理論を用いて、判別集合の幾何学的意味を調べる。

4. 研究成果

これらの研究について以下の成果を得た。

(1) フロントのガウス写像や焦面の研究

(i) フロントのガウス写像に現れる特異点について：非退化特異点を持つフロントのガウス写像において、特異点として、折り目、カスプ、ツバメの尾、嘴、唇が現れるための条件を主曲率関数から定まる性質である峰点や主曲率関数のヘッセ行列式の符号を用いて明らかにした。また、カスプ辺に対して、ガウス写像の特異点をカスプ辺上で定義される不変量を用いて特徴づけた。さらに、有界なガウス曲率を持つカスプ辺に対して、ガウス曲率の符号と特異曲率と呼ばれる符号の関係をガウス写像に現れる特異点型を通して明らかにした。

また、フロントでないフロンタルのガウス写像についても研究を行った。この場合、上述の特異点に対する特徴づけを不変量とフロンタルの特異点型を用いて与えた。さらに、フロントとは異なり、フロンタルのガウス写像は階数零の特異点を持つことがわかり、その特異点が鯨鰭特異点となるための条件を与えた。

(ii) フロントの焦面について：フロントの(特異点において)非有界な主曲率関数に対する焦面の研究を行った。一般に、ガウス曲率が有界なフロントの主曲率関数は、特異点集合上で零開

数となるため、特異点集合の近くで焦面を定義することができない。一方、非有界な主曲率関数の逆数は、特異点集合においても滑らかな関数となるため、焦面が定義できる。この焦面について、現れる特異点を初期フロントの特異点型と幾何学的性質を用いて特徴づけた。さらに、応用として、ガウス曲率が負で一定の曲面である、擬球的曲面に対して、非有界関数に関する焦面を考察した。その結果、焦面が極小曲面なるための条件を求めた。また、ディニ曲面族の焦面が懸垂面から常螺旋面への等長変形を与えることを明らかにした。

(2) フロントの主曲率関数の挙動について：非退化なフロントル特異点で像が生息空間曲線となるものについて考察を行った。特異点集合がフロントでないフロントル特異点(純フロントル特異点)の場合、特異点において一方の主曲率関数がなめらかな関数に拡張できるための条件を幾何学的不変量を用いて与えた。また、特異点が臍点となる条件および、臍点が孤立点となるための十分条件を明らかにした。特に、臍点が孤立するためには、フロントルの特典が $5/2$ -カスプであることが十分条件として得られることを示した。一方、一点がフロントル特異点で回りがフロントル特異点の場合、主曲率関数の連続拡張可能性を特異点型や不変量を用いて特徴づけた。この場合に対しても、特異点が臍点となるための条件や、それが孤立点となるための条件を与えた。応用として、純フロントル特異点を持つフロントルに対して、曲率線枠の概念を導入した。また、それを用いて、フロントルのリバクール変換を定式化した。

(3)(i) 極大面・空間的平均曲率一定曲面を与える表現公式で与えられる曲面について：極大面とは、3次元ミンコフスキー空間内の平均曲率零な空間的曲面で、ある種の特異点を許容するものである。このクラスの曲面に対して、極小曲面と類似のワイエルシュトラス型表現公式が知られている。この曲面の像域を3次元ユークリッド空間とすると、フロントル曲面が得られる。また、空間的平均曲率一定曲面についても同様の剣持型表現公式が知られており、像域を3次元ユークリッド空間とすると、こちらにも自然にフロントルとなる。このようにして与えられる曲面に対して、現れる特異点について考察を行った。特に、極大面については、カスプ状 $k \geq 1$ 特異点は現れないことを示した。幾何学的性質については、特異点集合上で、特異曲率の符号は負であり、極限法曲率は常に零となることを示した。これは、この種の表現公式で与えられる曲面特有の性質であると考えられる。

(ii) 3次元双曲空間/ド・ジッター - 空間内の平坦波面について：3次元双曲空間やド・ジッター空間内の平坦波面に対してもワイエルシュトラス型表現公式が知られている。この表現公式に表れるデータを用いて、ド・ジッター - 空間内の平坦波面に現れる特異点の特徴づけを与えた。また、平坦波面がカスプ辺を持つとき、その点での幾何学的不変量をデータを用いて明示的に与え、それらの間の双対性を明らかにした。また、錘状特異点に対する特徴づけも明らかにした。

(4) 混合型曲面の光的点集合に対して、その像に沿った二種類の関数を定義し、その性質を調べた。その結果、接触光的曲面と横断的光的曲面の二種類の光的可展面のていぎを与えた。さらに、これらの可展面に現れる特異点を、これまでの研究で定式化していた不変量を用いて特徴づけた。さらに、光円錐との接触との関係を特異点型を通して明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Teramoto Keisuke	4. 巻 78
2. 論文標題 On Gaussian curvatures and singularities of Gauss maps of cuspidal edges	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Portugaliae Mathematica	6. 最初と最後の頁 169 ~ 185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PM/2065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Saji Kentaro, Teramoto Keisuke	4. 巻 112
2. 論文標題 Behavior of principal curvatures of frontals near non-front singular points and their applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 25 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-021-00605-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Honda Atsufumi, Izumiya Shyuichi, Saji Kentaro, Teramoto Keisuke	4. 巻 45
2. 論文標題 Geometry of lightlike locus on mixed type surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space from a contact viewpoint	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 51 ~ 68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21099/tkbjm/20214501051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Matsushita Yoshiki, Nakashima Takuya, Teramoto Keisuke	4. 巻 99
2. 論文標題 Geometric properties near singular points of surfaces given by certain representation formulae	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen	6. 最初と最後の頁 331 ~ 354
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5486/PMD.2021.8904	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Teramoto Keisuke	4. 巻 69
2. 論文標題 Singularities of Gauss maps of wave fronts with non-degenerate singular points	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics	6. 最初と最後の頁 149 ~ 169
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/ba200820-13-11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahashi Masatomo, Teramoto Keisuke	4. 巻 51
2. 論文標題 Surfaces of Revolution of Frontals in the Euclidean Space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 887 ~ 914
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00574-019-00180-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 寺本 圭佑
2. 発表標題 波面の非有界な主曲率に関する焦曲面
3. 学会等名 特異点論の未来
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺本 圭佑
2. 発表標題 波面の焦曲面について
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2021 オンライン (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺本 圭佑
2. 発表標題 擬球的曲面の焦面について
3. 学会等名 横浜幾何学小研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keisuke Teramoto
2. 発表標題 On caustics of pseudo-spherical surfaces
3. 学会等名 On-demand conference Singularity theory and its application (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keisuke Teramoto
2. 発表標題 Behavior of principal curvatures of frontals near non-front singular points
3. 学会等名 The 16th International Workshop on Real and Complex Singularity Theory (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 寺本圭佑
2. 発表標題 カスプ辺のガウス曲率とガウス写像の特異性について
3. 学会等名 部分多様体論オンライン2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 寺本圭佑
2. 発表標題 ある表現公式で与えられる曲面の特異点における幾何学的性質について
3. 学会等名 幾何や自然科学に現れる特異点
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺本 圭佑
2. 発表標題 Duality of geometric invariants on cuspidal edges on flat fronts in the hyperbolic 3-space and the de Sitter 3-space
3. 学会等名 Workshop on Submanifold theory in a wider sense (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 keisuke Teramoto
2. 発表標題 Behavior of the Gaussian curvature and singularities of Gauss map of cuspidal edges
3. 学会等名 Brazilian-Japanese singularity days at Unesp/Rio Preto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------