

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14536

研究課題名（和文）組合せ論に関連するホモトピー論の研究

研究課題名（英文）Study of homotopy theory which relates to combinatorics

研究代表者

松下 尚弘（Matsushita, Takahiro）

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：30812292

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、グラフ理論における未解決問題であった Hedetniemi 予想へのホモトピー論の応用と、 $Z/2$ -指数に関する考察から幽霊写像の一般化である相対的幽霊写像に注目し、位相的組合せ論の研究を行った。途中、Shitov による Hedetniemi 予想の否定的解決があり、研究計画の変更が必要となったが、結果的に位相的組合せ論に関する多くの成果を挙げる事ができた。特に、多様体の三角形分割に関する van Kampen-Flores 定理の一般化、グリッドグラフの独立複体のホモトピー型の決定、および支配複体と近傍複体の研究は国際的な注目を集めている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は数学の一分野であるホモトピー論と位相的組合せ論に新たな視点をもたらし、特に多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores の定理の研究やグラフの独立複体や支配複体の研究などにより、グラフ理論の応用において顕著な進展を達成した。グラフの彩色問題への新しいアプローチは、数学の基本問題に対する理解を深める上で重要な役割を果たしている。彩色問題を含め、グラフ理論における多くの研究は、計算機科学やネットワーク設計など、他分野への応用可能性の大きい分野であり、純粋数学の範囲を超えた社会的影響を期待させる。このように、本研究は学術的にも社会的にも大きな意義を持っている。

研究成果の概要（英文）：In this study, we study topological combinatorics in the context of applications of homotopy theory to the Hedetniemi conjecture, which had been an unsolved problem in graph theory, and of relative phantom maps, which are a generalization of phantom maps from the viewpoint of $Z/2$ -indices. Although I had to change our research plan due to the negative resolution of the Hedetniemi conjecture by Shitov, I was able to obtain many results on topological combinatorics as a result. In particular, the generalization of the van Kampen-Flores theorem on triangulations of manifolds, determination of homotopy types of independence complexes of certain grid graphs, and research on dominance and neighborhood complexes of graphs have attracted international attention.

研究分野：位相幾何学

キーワード：近傍複体 独立複体 相対的幽霊写像 独立複体

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初においては、グラフ理論における Hedenitmi 予想は長年の未解決問題として残っており、私の以前の研究によって、変換群論の応用によって Hedenitmi 予想の否定的解決が導かれる可能性が示唆されていた。

グラフ理論における de Bruijn-Erdos の定理とは、無限グラフに対する定理であり、有限部分グラフが常に k -彩色可能なら、元々のグラフも k -彩色可能であるというグラフ理論における古典的な定理である。グラフは箱複体によって $Z/2$ -位相空間が対応しており、グラフの彩色は球面への $Z/2$ -同変連続写像に対応している。軌道空間を取って、de Bruijn-Erdos の定理の変換群論の言葉で書き直す際、相対的幽霊写像の概念に到達する。

CW-複体 X と、位相空間の間の写像 $B \rightarrow Y$ があったとき、 X から Y への連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が相対的幽霊写像であるとは、 X の任意の有限部分複体への制限が、 B を経由する写像とホモトピックであることをいう。相対的幽霊写像はホモトピー論の古典的な研究対象である、幽霊写像の一般化であり、 B が一点空間の場合が幽霊写像である。すなわち、幽霊写像とは有限部分複体に制限するとヌルホモトピックになる写像のことである。

相対的幽霊写像は岸本大祐氏(当時京都大学准教授)、および入江幸右衛門氏(当時大阪府立大学教授)と私によって、上記の de Bruijn-Erdos の定理を背景として導入されたホモトピー論的概念である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、Hedetniemi 予想への変換群論の研究の応用と、相対的幽霊写像の研究を題材として、位相的組合せ論の研究を通して、ホモトピー論と組合せ論の研究を深めることである。

3. 研究の方法

Hedetniemi 予想においては、 $Z/2$ -指数が無限次元実射影空間への連続写像の LS カテゴリーとしてみなせることから、LS カテゴリーの手法を用いて Hedetniemi 予想の解決に近づこうとしていた。相対的幽霊写像については、古典的な \lim^1 の手法を空間対に対して精密化することを考えていた。

4. 研究成果

途中、Shitov による Hedetniemi 予想の否定的解決などがあり、研究計画の変更を余儀なくされたが、結果的に多くの研究成果を上げることができた。相対的幽霊写像に関する研究についても研究成果を発表できた他、多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores の定理の一般化、近傍複体と Kronecker 二重被覆との関係性と、二部 Kneser グラフを Kronecker 二重被覆に持つグラフの完全な分類、グリッドグラフの独立複体のホモトピー型の決定、支配複体と近傍複体と独立複体の関係など、多くの研究成果を上げることで、位相的組合せ論の研究を進めることができた。

まず van Kampen-Flores 型の定理について述べる。van Kampen-Flores の定理とは、 $2d+2$ 次元の単体の d -骨格が $2d$ 次元ユークリッド空間に位相的に埋め込むことが出来ないという定理である。全ての d 次元有限単体複体は、 $2d+1$ 次元のユークリッド空間には埋め込むことができるので、van Kampen-Flores の定理は d 次元の単体複体で $2d$ 次元のユークリッド空間に埋め込むことが出来ないものが存在するという意味で、古典的に重要な成果である。特に van Kampen-Flores の定理の $d = 1$ の場合は、 K_5 が非平面的であるという定理であり、これは位相的グラフ理論における基礎的な事実である。

一般的に、単体複体 K に対して、「 K の d -骨格は $2d$ 次元のユークリッド空間に埋め込むことが出来ない」というタイプの主張は多くあり、それらを総じて van Kampen-Flores 型の定理という。例えば、球面を除く閉曲面の三角形分割の 1 -骨格は非平面的、すなわち 2 次元ユークリッド空間に埋め込むことができないということが、位相的グラフ理論において基礎的な事実として知られており、これも van Kampen-Flores 型の定理と位置付けることができる。

岸本大祐氏(九州大学)との共同研究によって、多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores 型の定理について調べた。主なクラスとしては、 K が $(2d+1)$ -次元 $Z/2$ -ホモロジー球面の三角形分割である場合と、 K が全 Stiefel-Whitney 類が非自明な $(2d+1)$ 次元微分可能多様体に対して van Kampen-Flores 型の定理が成立すること、すなわち K の d -骨格が $2d$ 次元のユークリッド空間に埋め込むことができないことを証明した。

続いて名古屋大学の若月駿氏との共同研究で得られた、支配複体に関する研究について述べる。有限単純グラフの頂点集合の部分集合が支配的であるとは、全ての頂点が、その集合の元かその集合の元と隣接していることをいう。支配複体とは、底集合を頂点集合とし、補集合が支配的集合となる場合に単体となるような単体複体のことである。支配複体は、以前は散発的に研究がなされていただけであったが、我々の研究によって、位相的組合せ論における中心的な役割を

担っている近傍複体との関連性が明らかになった。

近傍複体とはグラフから構成される単体複体の一種で、Lovasz により Kneser 予想の解決の際に導入された。グラフ G の近傍複体が n -連結であるならば、 G の彩色数は $n + 3$ 以上であることが知られている。我々の研究により、支配複体の組合せ論的アレクサンダー双対は、補グラフの近傍複体と一致することがわかった。これにより、支配複体のホモロジー次元が、彩色数と関連することがわかり、支配複体を研究する組合せ論的意義を増すことができた。また支配複体において知られていた数多くの結果が、近傍複体に関する考察からわかることを示した。その他、超グラフの独立複体に対する Nagel-Reiner の定理を用いることで、 $n \times 3$ -グリッドグラフの支配複体のホモロジー群を完全に決定した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計16件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawasaki Morimichi、Kimura Mitsuaki、Matsushita Takahiro、Mimura Masato	4. 巻 68
2. 論文標題 Bavard's duality theorem for mixed commutator length	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 L'Enseignement Mathematique	6. 最初と最後の頁 441 ~ 481
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/LEM/1037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsushita Takahiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Dominance complexes and vertex cover numbers of graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Applied and Computational Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41468-022-00109-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kishimoto Daisuke、Matsushita Takahiro、Yoshise Ryusei	4. 巻 312
2. 論文標題 Jacobi identity in polyhedral products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2022.108079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 MATSUSHITA Takahiro	4. 巻 51
2. 論文標題 Matching complexes of polygonal line tilings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/2019-213	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Matsushita	4. 巻 58
2. 論文標題 Neighborhood complexes of Kronecker double coverings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 637-645
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Daisuke Kishimoto, Takahiro Matsushita	4. 巻 149
2. 論文標題 Relative phantom maps and rational homotopy	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4029-4040
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Matsushita	4. 巻 344
2. 論文標題 Graphs whose Kronecker covers are bipartite Kneser graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kouyemon Iriye, Daisuke Kishimoto, Takahiro Matsushita	4. 巻 19
2. 論文標題 Relative phantom maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 341-362
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Matsushita	4. 巻 26
2. 論文標題 Matching complexes of small grids	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Matsushita	4. 巻 62
2. 論文標題 Z2-indiced and Hedetniemi's conjecture	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 662-673
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawasaki Morimichi、Kimura Mitsuaki、Matsushita Takahiro、Mimura Masato	4. 巻 33
2. 論文標題 Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1322 ~ 1353
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00039-023-00644-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawasaki Morimichi、Kimura Mitsuaki、Maruyama Shuhei、Matsushita Takahiro、Mimura Masato	4. 巻 46
2. 論文標題 Mixed commutator lengths, wreath products and general ranks	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 145 ~ 183
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj46202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsushita Takahiro, Wakatsuki Shun	4. 巻 334
2. 論文標題 Independence complexes of $(n \times 4)$ and $(n \times 5)$ -grid graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 108541 ~ 108541
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2023.108541	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kishimoto Daisuke, Matsushita Takahiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/16652	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kishimoto Daisuke, Matsushita Takahiro	4. 巻 71
2. 論文標題 Van Kampen-Flores Theorem for Cell Complexes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 1081 ~ 1091
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-023-00559-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsushita Takahiro, Wakatsuki Shun	4. 巻 26
2. 論文標題 Independence complexes of $(n \times 6)$ -grid graphs	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 15 ~ 27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/hha.2024.v26.n1.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 22件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 The spaces of non-extendable quasimorphisms
3. 学会等名 Classifying spaces in homotopy theory: in honour of Ran Levi's 60th Birthday. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 混合交換子長の幾何学的解釈
3. 学会等名 The 6th Workshop on Geometric Group Theory (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 安定混合交換子長の非同値性について
3. 学会等名 ホモトピー論シンポジウム2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Independence complexes of certain square grid graphs
3. 学会等名 Joint Mathematics Meeting 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 不変擬準同型と混合交換子長について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会 トポロジー分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 拡張不能な擬準同型のなす空間について
3. 学会等名 N-KOOK セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 拡張不能な擬準同型について
3. 学会等名 談話会（京都大学数学教室）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Graphs whose Kronecker covers are bipartite Kneser graphs
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 群の擬準同型の拡張問題と商群の二次コホモロジーについて
3. 学会等名 2021年度ホモトピー論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 A geometric interpretation of mixed commutator lengths
3. 学会等名 Homotopy theory symposium 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 独立複体と関連する単体複体について(I, II)
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 相対的幽霊写像
3. 学会等名 東北大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 小さなグリッドグラフのマッチング複体のホモトピー型について
3. 学会等名 トポロジー金曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Relative phantom maps and rational homotopy
3. 学会等名 The Homotopy Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Relative phantom maps
3. 学会等名 The Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 Matching complexes of small grids
3. 学会等名 微分空間・トポロジーと組み合わせ構造 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松下尚弘
2. 発表標題 Bounded degree complexes and independence complexes of hypergraphs
3. 学会等名 代数トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes
3. 学会等名 金曜トポロジーセミナー（九州大学）（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 ファンカンペン=フローレスの定理とシュティーターフェル=ホイットニー類
3. 学会等名 数理科学談話会（信州大学）（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes
3. 学会等名 ホモトピー論シンポジウム2023（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes
3. 学会等名 第49回変換群論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahiro Matsushita
2. 発表標題 位相的 Radon の定理と van Kampen-Flores の定理
3. 学会等名 大阪組合せ論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------